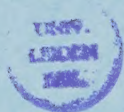


Homoklinische Strukturen und Geisterlösungen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Universität Bremen

vorgelegt von
Hartmut Jürgens
aus
Bremen-Vegesack

Bremen 1983





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546612_0015

HOMOKLINISCHE STRUKTUREN

UND

GEISTERLÖSUNGEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Universität Bremen

vorgelegt von

Hartmut Jürgens

aus

Bremen - Vegesack

Bremen 1983

Herr, die Not ist groß!
Die ich rief, die Geister,
werd' ich nun nicht los.

Der Zauberlehrling,
Goethe

Die Dissertation lag dem Promotionsausschuß Dr. Ing. / Dr. rer. nat.
der Universität Bremen vor. An dem Promotionsverfahren haben Prof. Dr.
Heinz-Otto Peitgen und Prof. Dr. Eugen Allgower als Gutachter mitgewirkt.
Das Kolloquium fand am 7.7.1983 statt.

Inhalt

Einleitung

0.1	Geisterlösungen einer Randwertaufgabe	5
0.2	Diskrete dynamische Systeme	12

Kapitel I Grundlagen

1.1	Der Homöomorphismus T und seine Symmetrien	20
1.2	Homoklinische Strukturen	25
1.3	PL - Abbildungen	33
1.4	Abbildungsgrad und Schnitte von Zellen	36
1.5	Grundlegende Hilfssätze	42

Kapitel II Geisterlösungen

2.1	Isolierte Lösungskontinua (Typ I)	48
2.2	Sekundärverzweigung asymmetrischer Lösungen (Typ III)	60
2.3	Ein PL - Modell und seine homoklinische Struktur	64
2.4	Geisterlösungen durch Transition - PL (Typ II)	81
2.5	Verzweigung asymmetrischer Geisterlösungen - PL	85

Literatur 95

Anhang A Weitere Beispiele

A.1	Ein B - Spline - Ansatz für $u'' = -\lambda f(u)$	98
A.2	Die Gleichung $\Delta u = -\lambda f(u)$	102

Anhang B Beweis des Schnitzzahl - Lemmas 111

Anhang C Bezeichnungen 114

Einleitung

0.1 Geisterlösungen einer Randwertaufgabe

Bei der numerischen Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen begegnet man einem Phänomen, das man wegen seines unerwarteten Auftretens (und auch Verschwindens) Geisterlösungen nennt. Das Problem entsteht mit der Approximation einer Differentialgleichung durch ein diskretes bzw. endlich dimensionales Modell, das numerisch gelöst werden kann. Anstelle einer eindeutigen Approximation der verschiedenen Lösungen der Differentialgleichung durch jeweils eine Lösung des Modells beobachtet man ein großes Maß an Nichteindeutigkeiten. Darüber hinaus finden sich zwischen den Lösungen der Modell- und der Differentialgleichungen auch strukturelle Inkompatibilitäten. Das heißt, es gibt Lösungen, die Strukturmerkmale aufweisen, die im Widerspruch zu verschiedenen Eigenschaften der (richtigen) Lösungen der Differentialgleichung stehen.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Geisterlösungen (üblich sind auch die Bezeichnungen: ghost solution, spurious, numerically irrelevant, numerisches Artefakt, falsche Lösung) von Randwertaufgaben. Im Mittelpunkt steht dabei das folgende Problem:

A u f g a b e (0.1)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig. Man finde $u \in C^2[0,a]$, $u \geq 0$ mit

$$u'' + \lambda f(u) = 0$$

$$u(0) = u(a) = 0 .$$



Wir unterteilen das Intervall $[0,a]$ durch n (Gitter-) Punkte t_i äquidistant. Es ist also

$$h := t_{i+1} - t_i = \frac{a}{n+1}.$$

h nennen wir die Maschenweite der Diskretisierung. Für die Ableitung $u''(t_i)$ setzen wir den Differenzenquotienten

$$u_i'' := \frac{u(t_{i-1}) - 2u(t_i) + u(t_{i+1}))}{h^2}$$

an. (Ist u hinreichend glatt, so ist $u_i'' = u''(t_i) + O(h^2)$, vgl. $|K|, |OP|$)

Damit gelangen wir zu dem folgenden n -dimensionalen, diskreten Problem:

A u f g a b e (0.2)

Finde $\bar{u} := (u_1, u_2, \dots, u_n)$, so daß

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} + \lambda h^2 f(u_i) = 0, \quad i = 1, n$$

$$u_i \geq 0$$

und

$$u_0 = u_{n+1} = 0$$

gilt.

Ist n groß, d.h. h klein, so erwarten wir eine hinreichend gute Approximation $u(t_i) \approx u_i$. Wie wir aber sehen werden, ist dieses nur bedingt richtig.

Geisterlösungen unseres Problems wurden bereits mehrfach diskutiert. In $|A|$ zeigt E. Allgower, daß (0.2) für $f(t) = t^k$ Geisterlösungen besitzt. Positive Lösungen der Differentialgleichung (0.1) müssen symmetrisch sein, d.h. $u(t) = u(a-t)$. Das Problem (0.2) hat aber, so wird gezeigt, auch asymmetrische Lösungen. E. Bohl nutzt in $|B|$ die Eindeutigkeit von positiven Lösungen der Gleichung (0.1) für bestimmte Nichtlinearitäten, um das Problem Geisterlösungen anzusprechen. Insbesondere werden

auch symmetrische Geister gefunden. In der Tat ist Symmetrie und Asymmetrie nur ein Aspekt zur Identifizierung von Geisterlösungen.

Unterschiedliche Typen von Geisterlösungen werden von H.O. Peitgen und K. Schmitt in [PS] diskutiert. Dabei wird von einer bestimmten Klasse von Nichtlinearitäten ausgegangen. f hat zum einen mehrere Nullstellen, zum anderen genügt es gewissen Linearisierungsbedingungen. Als Beispiel wollen wir die folgende Nichtlinearität benutzen:

$$f_k(x) = \begin{cases} x & | \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2x & | \quad 0 < x \leq k\pi \\ x - k\pi & | \quad k\pi < x \end{cases} \quad (0.3)$$

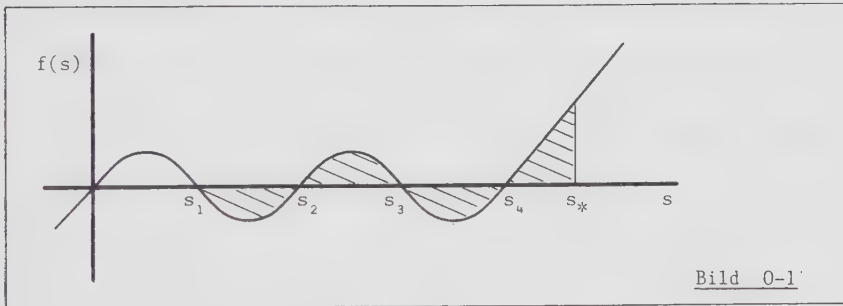


Bild 0-1

Schon in [PSS] wird gezeigt, hat f k positive Nullstellen, so hat die Aufgabe (0.2) für große Parameter λ k^n positive Lösungen, die durch eben diese Nullstellen charakterisiert sind. Fast alle diese Lösungen sind Geisterlösungen (Dieses ist schon deshalb klar, weil die Anzahl der Lösungen von der Dimension n abhängt). In [PS] werden drei Geisterlösungsphänomene des Problems (0.2) diskutiert:

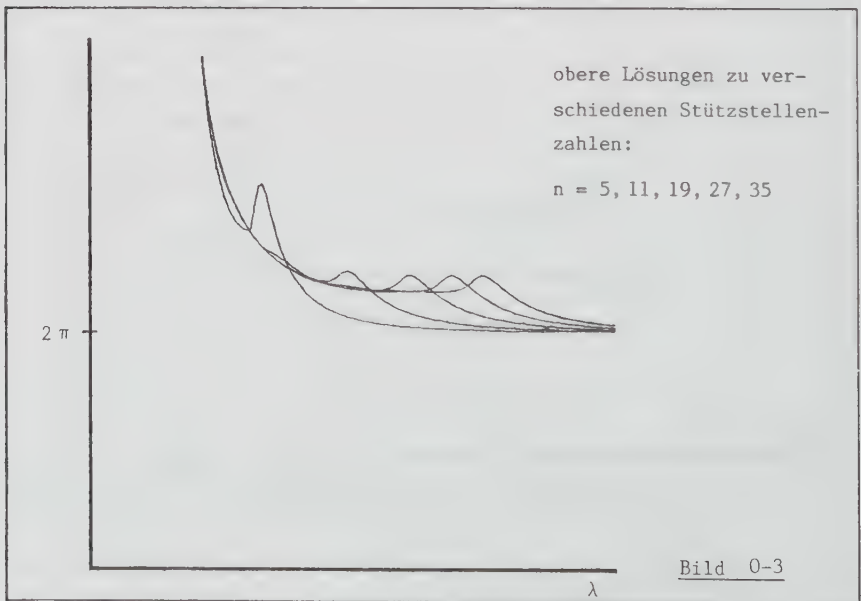
- I) isolierte Kontinua von Geisterlösungen ,
- II) Transition ,
- III) asymmetrische Geisterlösungen .

Typ I Isolierte Kontinua

Aus den zahlreichen isolierten Geisterlösungskontinua, die in $|PSS|$ und $|PS|$ vorgestellt werden, greifen wir jene heraus, deren Norm zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $k\pi$ liegt. Abbildung 0-2 zeigt ein Normdiagramm verschiedener Lösungen von (0.2). Als Nichtlinearität wurde f_2 (zwei Sinusschwingungen) verwendet. Wir werden uns mit diesen Geisterlösungen in Abschnitt 2.1 ausführlich beschäftigen.

Typ II Transition

In Bild 0-2 kann man auch ein gewisses Übergangsphänomen erkennen. Die Lösung u_0 scheint zunächst der Norm nach (von Unendlich kommend) gegen s_* streben zu wollen, wie wir es für "richtige" Lösungen erwarten. Dann aber gibt es ein recht überraschendes lokales Maximum. Die Lösung fällt dann (mit wachsendem λ) monoton gegen 2π ab und wird so zu einer "falschen Lösung". Wir haben dieses Experiment für verschiedene Dimen-



sionen n (Anzahl der Stützstellen bzw. Gitterpunkte der Diskretisierung) durchgeführt. In Abbildung 0-3 haben wir die "oberen Lösungskontinua" für verschiedene Dimensionen dargestellt.

Typ III Asymmetrische Lösungen

Die Gleichung (0.2) läßt im Gegensatz zu (0.1) asymmetrische Lösungen zu. Bild 0-4 zeigt für die Nichtlinearität f_1 neben dem Normdiagramm der "oberen Lösungen" eine 3-D-Darstellung. In Richtung der dritten Dimension haben wir ein Maß der Asymmetrie gezeichnet, nämlich

$$\text{asym}(\bar{u}) = \max \{u_1 - u_n, u_2 - u_{n-1}, \dots, u_n - u_1\}.$$

Wir bemerken die Verzweigung einer "Schleife" und einer "Gabel" von asymmetrischen Lösungen.

Bild 0-4 wurde mit $n = 10$ (also einer geraden Dimension) gerechnet.

Abbildung 0-5 zeigt die gleiche Situation für $n = 11$ (ungerade Dimen-

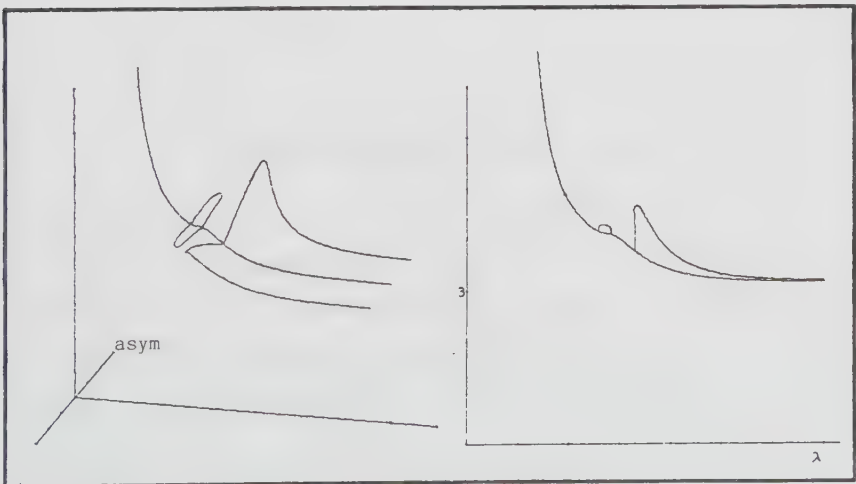


Bild 0-4 gerade Dimension ($n = 10$)

sion!). Hier stellen wir nur "Schleifenverzweigungen" fest. Diese Dimensionsabhängigkeit erscheint als ein besonders eigenartiges Phänomen der Geisterlösungen.

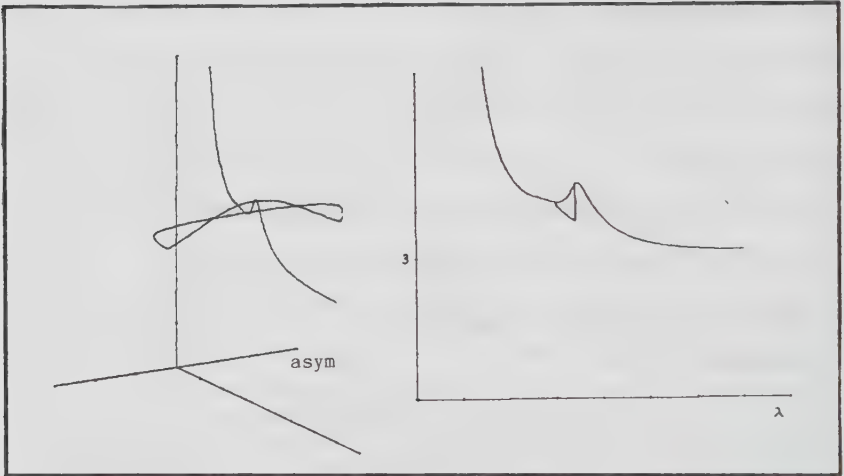


Bild 0-5 ungerade Dimension ($n = 11$)

0.2 Diskrete dynamische Systeme

In $|PS|$ und $|PSS|$ werden Geisterlösungen vorallem mit Hilfe von Kontinuitätsmethoden und des in $|JPS|$ vorgestellten Konzeptes der topologischen Perturbationen (eine umfangreiche Darstellung findet man in $|P,1|$) untersucht. In dieser Arbeit wollen wir dagegen von bestimmten (in gewissem Sinn zugehörigen) Punktabbildungen ausgehen. Wir lösen dazu (0.2) nach u_{i+1} auf:

$$u_{i+1} = 2u_i - \lambda h^2 f(u_i) - u_{i-1} .$$

Dieses führt uns zu der folgenden Abbildung:

Abbildung (0.4)

$$T_{\mu} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - \mu f(x) - y \\ x \end{pmatrix} .$$

T (den Index μ lassen wir in der Regel fort) bildet $\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i-1} \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} u_{i+1} \\ u_i \end{pmatrix}$

ab. Die Orbits des durch T beschriebenen diskreten dynamischen Systems

hängen also in offensichtlicher Weise mit den Lösungen des Problems (0.2)

zusammen. Die Randbedingungen stellen wir durch

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\} \quad \text{und}$$

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

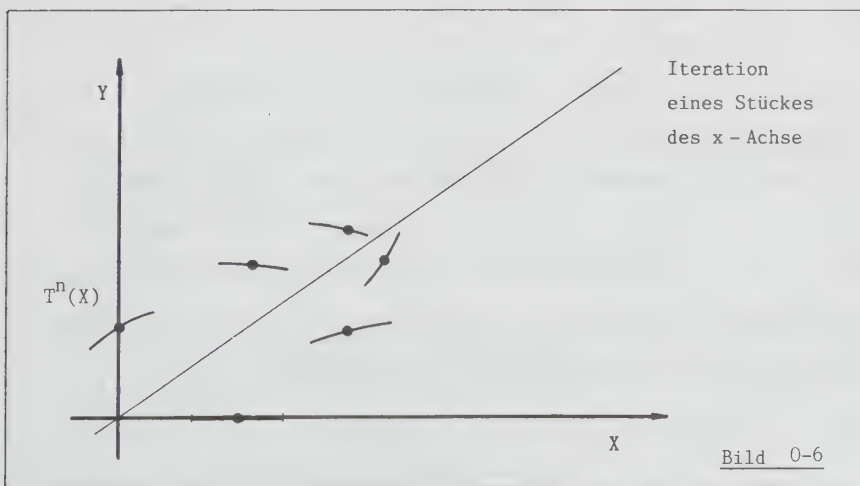
(0.5)

dar. Zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ definieren wir

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} := T^{k-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} .$$

Ist $\mu = \lambda h^2$, so folgt aus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in Y ,$$



daß $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Lösung von (0.2) ist.

Umgekehrt gilt, ist $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ eine Lösung von (0.2) und $x_1 = u_1$, $y_1 = 0$, so ist

$$T^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in Y.$$

Die Lösungen der Randwertaufgabe lassen sich also durch den Schnitt

$T^n(X) \cap Y$ (vgl. Abbildung 0-6) oder etwas allgemeiner durch

$$T^k(X) \cap T^{-m}(Y) \quad (\text{mit } k + m = n)$$

charakterisieren. Im weiteren werden wir uns auf die letzte Charakterisierung (und zwar für $k = m(-1)$) beziehen.

Das durch T beschriebene diskrete dynamische System können wir in Analogie zu dem durch die Differentialgleichung von (0.1) gegebenen freien dynamischen Systems sehen. Die Flußabbildung Θ_t dieses Systems entspricht dann unserer Abbildung T . Beide Abbildungen zeigen eine Vielzahl von Gemeinsamkeiten (siehe $|NP|$, $|P,2|$, sowie Abschnitt 1.1 und die Phasenportraits in Abschnitt 2.1: 2-2, 2-3). Beim Vergleich der Phasenportraits fällt jedoch das folgende, auf unser diskretes dynamisches System beschränkte Phänomen auf. Abbildung 0-7 zeigt die Orbits zweier Punkte (zwei verschiedene Punkte wurden unter T 1000 mal iteriert). Bei der Rechnung haben wir die Nichtlinearität f_1 (0.3) benutzt. Die Iteration des ersten Punktes formt eine scheinbar geschlossene Kurve, so wie wir es bei kontinuierlichen Systemen gewohnt sind. Die Iteration des zweiten Punktes (den wir in der Nähe des hyperbolischen Fixpunktes $H = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ gewählt haben) liefert dagegen einen Orbit, der chaotisches Verhalten zeigt. Die Dynamik von T ist hier scheinbar stochastisch. Die Vermutung liegt nahe, daß die von uns zu betrachtenden Geisterlösungen mit diesem Verhalten zusammenhängen.

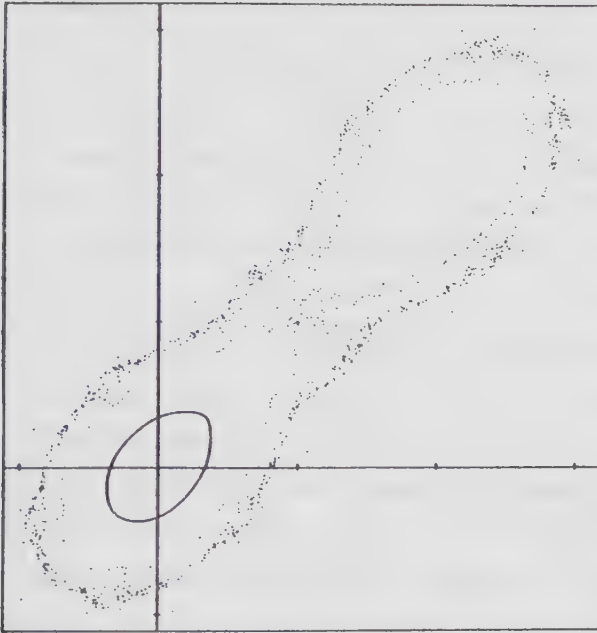


Bild 0-7

Iteration zweier
verschiedener Punkte

Für Anfangswertprobleme argumentieren M. Yamaguti und S. Uskiki [YU],
[U] genau in dieser Richtung. Sie diskutieren die logistische Gleichung

$$u' = \alpha u (1 - u), \text{ für } \alpha = 1.$$

Von T.Y. Li und J. Yorke wurde für die zugehörige Differenzengleichung

$$u_{n+1} = \lambda u_n (1 - k u_n) \quad (\text{vgl. [LY]})$$

bereits Chaos bewiesen. Yamaguti und Ushiki benutzen einen zentralen
Differenzenansatz

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = u_n (1 - u_n)$$

und gelangen so zu einer etwas anderen, insbesondere 2-dimensionalen Iterationsvorschrift, die unserer Abbildung T (0.4) ähnlich ist. Hierfür zeigen sie dann die Existenz sich scheinbar stochastisch verhaltender Orbits, d.h. in diesem Fall die Existenz von Geisterlösungen.

In unserer Situation (also für Randwertaufgaben) ist eine Gleichsetzung von Geisterlösungen und "stochastischen" Orbits nicht einfach möglich. Man kann sich durch Experimente am Computer überzeugen, daß derartige Orbits sowohl zu Geisterlösungen als auch zu solchen Lösungen gehören können, die wir als "richtig" ansehen möchten. Wir gehen in unserer Untersuchung auf die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der hyperbolischen Fixpunkte von T zurück.

Im Mittelpunkt steht dabei die Änderung der "Art und Weise", wie sich die Mannigfaltigkeiten schneiden, insbesondere die homoklinische Verzweigung. Das Konzept dieser Verzweigung wurde von H.O. Peitgen in [P,2] eingeführt. Bestimmte ausgezeichnete homoklinische Punkte (Mütter) unterliegen dabei einer Verzweigung. D.h., aus ihnen entstehen weitere homoklinische Punkte (Töchter). Ein besonderer Grenzfall ist dabei das Zusammenfallen von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit. Hier werden alle Punkte der Mannigfaltigkeiten zu homoklinischen Punkten. Wir werden dieses Phänomen vor allem in den Abschnitten 2.3-2.5, in denen wir unser Problem für eine stückweise lineare Abbildung f diskutieren, für konkrete Rechnungen ausnutzen.

Das Ziel der Arbeit ist nun, über die Diskussion der Schnitte der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten, sowie der die Randbedingungen charakterisierenden Mannigfaltigkeiten (X und Y , bzw. Iterationen hiervon), zum Verständnis der verschiedenen Geisterlösungstypen beizutragen. In groben Zügen ergibt sich der folgende Zugang.

Typ - I - Geister:

Diese Geisterlösungen werden wir durch Schnitte der iterierten Mannigfaltigkeiten $T^m(X)$ mit gewissen Symmetrielinien (die wir in Abschnitt 1.1 diskutieren) charakterisieren. Ob diese Schnitte existieren oder nicht, läßt sich

aus dem Schnittverhalten von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten (insbesondere der Entstehung bestimmter heteroklinischer Punkte) ableiten. Die Details erläutern wir in Abschnitt 2.1 .

Typ - II - Geister:

Das Phänomen "Transition" kann auf Singularitäten im Schnittverhalten der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten zurückgeführt werden. In Abschnitt 2.4 zeigen wir, daß aus der Existenz bestimmter Separatrizen im PL-Modell das Phänomen direkt abgeleitet werden kann.

Typ - III - Geister:

Die Verzweigung asymmetrischer Geisterlösungen zu erklären, ist das Hauptziel der Arbeit. Dabei gehen wir von der Tatsache aus, daß sich die iterierten Mannigfaltigkeiten $T^m(X)$, bzw. $T^{-m}(Y)$ den instabilen, bzw. stabilen Mannigfaltigkeiten anschmiegen. Einem Vorschlag von H.O. Peitgen folgend schließen wir dann von der Verzweigung homoklinischer Punkte auf eine Verzweigung in $T^m(X) \cap T^{-m}(Y)$. Um diesen Schluß auszuführen, benutzen wir Elemente der Abbildungsgradtheorie. Wir untersuchen, wie sich ein Gradwechsel bei der homoklinischen Verzweigung auf einen Wechsel im Schnitt $T^m(X) \cap T^{-m}(Y)$ überträgt. Durch den Gradwechsel in diesem Schnitt erhalten wir ein globales Sekundärverzweigungsergebnis. In Abschnitt 2.5 formulieren und beweisen wir für ein PL-Modell einen solchen globalen Verzweigungssatz (für asymmetrische Geisterlösungen). Dabei können wir über die Gestalt der Verzweigungsäste recht konkrete Angaben machen. Das Konzept unserer Schlußweise diskutieren wir in Abschnitt 2.2 .

Der Diskussion der Geisterlösungen in Kapitel II haben wir ein Kapitel vorangestellt, in dem wir einige von uns benötigte Begriffe und Tatsachen zusammenfassen. Bis auf die Darstellung der Schnitzzahlübertragung (1-9), die aus Überlegungen zum λ -Lemma von Palis entstand, handelt es sich hierbei um eine Zusammenstellung bekannter Fakten.

Im Hauptteil der Arbeit beschäftigen wir uns mit der gewöhnlichen Differentialgleichung (0.1) und dem Differenzenansatz (0.2). Das Phänomen der Geisterlösungen ist aber nicht hierauf beschränkt. Im Anhang A diskutieren wir einen B-Spline-Ansatz für (0.1), sowie die partielle Differentialgleichung $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Wir werden sehen, daß unsere Argumentation auch für diese Probleme geeignet ist.

Die in Abschnitt 0.1 dargestellten numerischen Ergebnisse, sowie einige Untersuchungen zu den Problemen im Anhang wurden mit dem interaktiven Computer Programm SCOUT [JS] erstellt. Die Graphiken in 0.1 (vgl. auch [PSS] und [PS]) entstanden im "Computer Aided Geometric Design Laboratory" des Department of Mathematics der University of Utah. Die übrigen Computergraphiken und numerischen Versuche zur Abbildung T wurden mit dem Programm GIPSY durchgeführt. Die Entwicklung dieses Computerprogramms ist im Prinzip Bestandteil der Arbeit. Das Experimentieren mit dem Programm hat viele der theoretischen Überlegungen motiviert (man vergleiche hierzu auch [P,2]). Speziell dem letzten Kapitel liegen viele Experimente am Computer zu Grunde. GIPSY ist ein interaktives Programm zum Studium von Punktabbildungen im $\mathbb{R}^2$. Es können verschiedene Objekte iteriert, Fixpunkte berechnet und Mannigfaltigkeiten gezeichnet werden. Wir verzichten auf eine Dokumentation im Rahmen dieser Arbeit und verweisen auf das im Sommer 1982 in erster Version entstandene GIPSY-Reference Manual [J]. Das Programm erfreute sich bereits nach kurzer Zeit mehrerer Benutzer. Insbesondere wurden mit seiner Hilfe mittlerweile zwei Filme über diskrete dynamische Systeme produziert.

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit im "Forschungsschwerpunkt Dynamische Systeme" der Universität Bremen. Sehr viele Impulse habe ich während meiner Gastaufenthalte an der University of Utah erhalten. Für die Einladung und freundliche Unterstützung möchte ich an dieser Stelle dem Department of Mathematics noch einmal danken. Ermöglicht wurde dieser Aufenthalt aber erst durch das besondere Engagement, mit dem sich Herr Prof. Dr. Peitgen für seine Mitarbeiter einsetzt. Auch das Thema dieser Arbeit entspringt seiner Anregung. Ich schulde ihm hierfür ganz besonderen Dank. Ohne seine Förderung, aber auch Kritik, hätte diese Arbeit nicht entstehen können.

Dank gebührt auch meinen Kollegen, die mir die Diskussion vieler Probleme ermöglichten. Und ganz bestimmt nicht vergessen möchte ich an dieser Stelle meine Eltern und meine Frau Iris, die mich auf ihre Weise bei der Arbeit unterstützt haben.

Kapitel I

Grundlagen

1.1 Der Homöomorphismus T und seine Symmetrien

Die Randwertaufgabe (0.2) führte uns zu einer Abbildung T (0.4), die ein diskretes dynamisches System beschreibt. Wir wollen uns mit dieser Abbildung genauer befassen. Durch den Differenzenquotienten in (0.2) werden drei Komponenten (nämlich u_{i-1} , u_i und u_{i+1}) miteinander in einer impliziten Gleichung $F(x,y,z) = 0$ verknüpft. In unserem Fall gilt

$$F(x,y,z) = y - 2x + z + \mu f(x) .$$

Im Anhang A werden wir weitere Abbildungen F diskutieren. Im allgemeinen ist F daher eine stetige Abbildung $F: \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die sich nach dem dritten Argument auflösen läßt. Es gibt also ein $G: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß

$$z = G(x,y) \iff F(x,y,z) = 0$$

gilt. Für unsere bisherigen Betrachtungen gilt

$$G(x,y) = 2x - \mu f(x) - y .$$

Wir wollen nun die Abbildung

$$T: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} G(x,y) \\ x \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

studieren. F ist symmetrisch (d.h., es gilt $F(x,y,z) = F(x,z,y)$). Dadurch wird T zu einer reversiblen Abbildung.

Definition

Eine Abbildung $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt reversibel, falls es zwei Involutionen $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$H = S \circ R$$

gilt.

Sei nun $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ jene Involution, die die Spiegelung an der "Hauptdiagonalen" beschreibt, also

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sei ferner $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ durch

$$R = S \circ T$$

gegeben.

Lemma 1-1 (*T ist reversibel*)

Die Abbildung R ist eine Involution. T ist eine reversible Abbildung.

Es gilt

$$T = S \circ R$$

$$T^{-1} = R \circ S.$$

Bemerkung und Beweis:

Unser Lemma zeigt insbesondere, daß T ein Homöomorphismus ist. Zum Beweis betrachte man $S \circ T \circ S \circ T$ und setze einfach die Definitionen ein. \$

Wir definieren nun die für uns recht wichtigen Fixpunktmenngen des Produkts zweier Involutionen S und R :

$$R_i := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid S \circ T^i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \quad \text{für } \underline{i \in \mathbb{Z}}.$$

(R_1 wird manchmal auch als Komplementärlinie bezeichnet. Ebenso sagt man,

daß R die zu S komplementäre Involution ist. Man vergleiche [GKVF].)

Für unsere Involutionen gilt

$$R_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = y \right\},$$

$$R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = G(x, y) \right\}.$$

Die übrigen Mengen R_i ergeben sich aus R_0 und R_1 wie folgt:

$$R_{2i} = T^{-i}(R_0),$$

$$R_{2i+1} = T^{-i}(R_1).$$

Wir rechnen die erste Beziehung exemplarisch nach.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R_{2i} &\iff S T^{2i} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff T^{-i} S T^i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff S T^i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff T^i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R_0 \end{aligned}$$

Man beachte, daß unsere Involution

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ G(x, y) \end{pmatrix}$$

x invariant läßt und für $G(x, y) = H(x) - y$ (in unserem Fall ist $H(x) = 2x - \mu f(x)$) als Spiegelung an der Symmetrielinie

$$R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = \frac{H(x)}{2} \right\}$$

veranschaulicht werden kann:

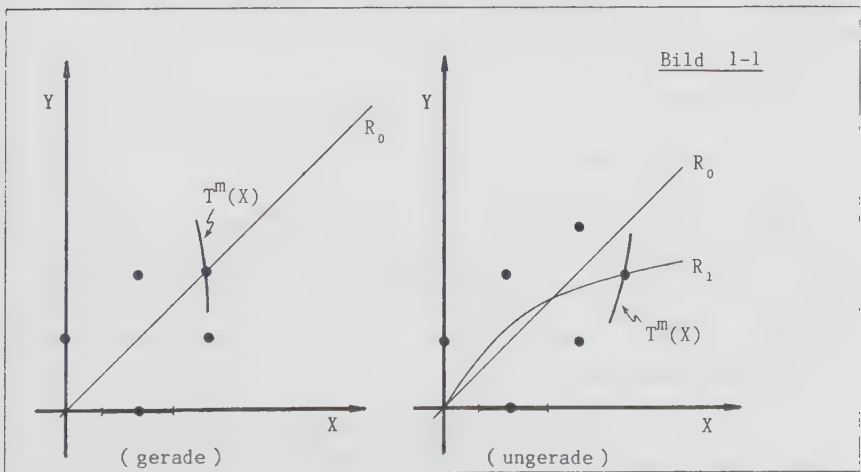
$$R \left(\begin{pmatrix} x \\ \frac{H(x)}{2} + d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{H(x)}{2} - d \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung T können wir uns daher geometrisch sehr gut vorstellen, nämlich als Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen (zunächst an R_1 und dann an R_0).

Bemerkungen

Unsere Darstellung der Symmetrien von T findet sich in ähnlicher Weise in $|P, 2|$, $|NP|$. Aber bereits G.D. Birkhoff nutzte in $|Bi|$ diese Symmetrien (im Zusammenhang mit periodischen Punkten). Man vergleiche auch de Vogelaere $|V|$, Greene $|G|$, sowie $|GKVF|$ und $|U|$. Durch den Schnitt der Symmetrielinien $R_i \cap R_j$ sind periodische Punkte (für die $T^{i-j}(P) = P$ gilt) gegeben. Wäre $f(-x) = -f(x)$, so könnten wir die Lösungen der Randwertaufgabe auch durch bestimmte periodische Punkte charakterisieren. Man beachte ferner, daß sich die Verzweigung homoklinischer Punkte nicht nur auf den Schnitt $T^m(X) \cap T^{-m}(Y)$ überträgt (vgl. Einleitung und Kapitel II), sondern auch auf $R_i \cap R_j$, also eine Verzweigung periodischer Punkte bewirkt. Wir gehen hierauf nicht weiter ein.

Die Mengen R_0 und R_1 gestatten uns nun symmetrische Lösungen unserer Randwertaufgabe (0.2), d.h. Lösungen $(u_1, \dots, u_n)$, für die $u_k = u_{n+1-k}$ ($k = 1, n$) gilt, zu charakterisieren.



L e m m a 1-2 (symmetrische Lösungen)

a) Sei $u_0 = u_{n+1} = 0$ und $(u_1, \dots, u_n)$ eine symmetrische Lösung von (0.2). Ist $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) gerade, so gilt

$$T^m \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \in R_0,$$

ist $n = 2m+1$ ungerade, so gilt

$$T^m \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \in R_1.$$

b) Sei $X := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ und $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = T^{i-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Ist $T^m \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in R_0$, so ist

$(x_1, x_2, \dots, x_{2m})$ eine symmetrische Lösung von (0.2),

ist $T^m \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in R_1$, so ist

$(x_1, x_2, \dots, x_{2m+1})$ eine symmetrische Lösung von (0.2).

Beweis:

a) Ist $n = 2m$, so folgt $u_m = u_{m+1}$, also $\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_m \end{pmatrix} \in R_0$.

Ist $n = 2m+1$, so folgt $u_m = u_{m+2}$, also gilt

$$R \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_m \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_{m+2} \\ u_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_m \end{pmatrix}.$$

b) Folgt entsprechend.

S

Wir können also sagen, daß die symmetrischen Lösungen durch den Schnitt von R_0 (bzw. R_1) mit der m -ten Iterierten $T^m(X)$ der Menge X charakterisiert sind. In der Einleitung haben wir beliebige Lösungen der Randwertaufgabe und den Schnitt

$$L_S := T^{-m}(Y) \cap T^m(X) \quad (\text{bzw. } L_R := T^{-(m+1)}(Y) \cap T^m(X))$$

miteinander in Beziehung gesetzt. Nun gilt aber

$$T^{-m}(Y) = \text{SoT}^m(X) \quad (\text{bzw. } T^{-(m+1)}(Y) = \text{RoT}^m(X))$$

und damit natürlich

$$T^m(X) \cap R_0 \subset L_S \quad (\text{bzw. } T^m(X) \cap R_1 \subset L_R).$$

Die Verzweigung asymmetrischer Lösungen der Randwertaufgabe bedeutet hier also das Entstehen von Schnittpunkten in L_S (bzw. L_R), die aus $T^m(X) \cap R_0$ (bzw. $T^m(X) \cap R_1$) verzweigen.

1.2 Homoklinische Strukturen

Es ist unser Ziel, vom Verhalten der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten bestimmter hyperbolischer Fixpunkte auf Geisterlösungen zu schließen. Wir stellen hierfür zunächst einige Begriffe zusammen.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $H \in U$ und $J|_H$ die Jacobi-Matrix der Linearisierung in H regulär. H heißt hyperbolischer Fixpunkt, falls $T(H) = H$ und für alle Eigenwerte λ_i der Matrix $J|_H$ $|\lambda_i| \neq 1$ gilt.

Unsere Abbildung (0.4) besitzt offenbar in den Punkten $\begin{pmatrix} s_k \\ s_k \end{pmatrix}$ (wobei $f(s_k) = 0$ ist) Fixpunkte. Diese Fixpunkte sind hyperbolisch, wenn $f'(s_k) < 0$ gilt. In den hyperbolische Fixpunkten entspringen die von uns zu studierenden Mannigfaltigkeiten.

Sei nun $T : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus (d.h. $T : U \rightarrow T(U)$ ist eine Bijektion und T sowie T^{-1} sind bezüglich der auf U und $T(U)$ aus dem $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie stetig) und H ein hyperbolischer Fixpunkt.

Definition

$W^S(H)(T) := \{x \in U \mid T^n(x) \in U \text{ für alle } n > 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = H\}$

heißt stabile Mannigfaltigkeit,

$W^U(H)(T) := \{x \in U \mid T^{-n}(x) \in U \text{ für alle } n > 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(x) = H\}$

heißt instabile Mannigfaltigkeit

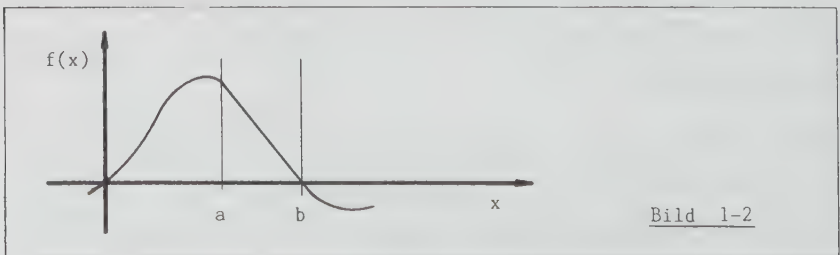
(des hyperbolischen Fixpunktes H der Abbildung T).

Bemerkung

Anstelle von $W^S(H)(T)$ (entsprechendes gilt für $W^U(H)(T)$) schreiben wir meist nur $W^S(H)$ oder W^S , da in der Regel keine Verwechslungen zu befürchten sind. Diese Mannigfaltigkeiten sind unter T invariant. Wir sprechen daher häufig auch einfach (zusammenfassend) von den invarianten Mannigfaltigkeiten. Lokal sind die invarianten Mannigfaltigkeiten durch die Linearisierung von T im hyperbolischen Fixpunkt bestimmt. Man beachte, daß W^S und W^U (global) im allgemeinen nur immensierte (keine eingebetteten) Untermannigfaltigkeiten sind (vgl. $|PaM|$, $|N|$).

Wir betrachten ein einfaches Beispiel. Sei dazu T die Abbildung (0.4) mit der stetigen Nichtlinearität $f \in N(a,b)$:

$$\begin{aligned} N(a,b) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig, } f(0)=f(b)=0, f \text{ ist in} \\ 0 \text{ und } b \text{ differenzierbar, } f(x) > 0 \text{ für } x \in (0,b), \\ f(x) = b-x \text{ für } x \in [a,b] \}. \end{aligned} \quad (1.2)$$



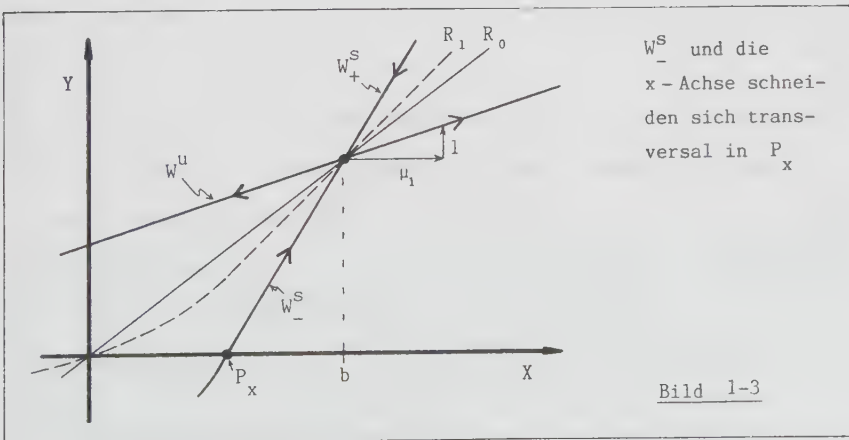
Für $\mu > 0$ ist der Punkt $H = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ ein hyperbolischer Fixpunkt, denn

$$J|_H = \begin{pmatrix} 2+\mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert die Eigenwerte $\mu_1 = \frac{\mu+2+\sqrt{\mu^2+4\mu}}{2} > 1$ und $\frac{1}{\mu_1}$. Die zugehörigen Eigenräume werden von den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Da die Abbildung T im Streifen $\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid a \leq x \leq b \}$ linear ist, sind hier die invarianten Mannigfaltigkeiten direkt durch diese Eigenräume gegeben. Ist nun $a < b(1 - \frac{1}{\mu_1})$, so schneidet $W^S(H)$ die x -Achse im Punkte P_x mit

$$P_x = \begin{pmatrix} b(1 - \frac{1}{\mu_1}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Strecke $\overline{P_x H}$ gilt $\overline{P_x H} \subset W^S(H)$ (vgl. Bild 1-3). Wir bezeichnen den Zweig von W^S , in dem $\overline{P_x H}$ enthalten ist, mit W_-^S , da er in die "Richtung" des Vektors $H - \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ weist. In unserem Fall ist W_-^S sogar durch $H - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$, $t > 0$ parametrisiert. $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ ist ein Tangentialvektor dieser Parametrisierung in P_x . Er ist linear unabhängig von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dem Tangentialvektor der kanonischen Parametrisierung der x -Achse. Wir sagen daher, daß der Schnitt in P_x transversal ist.



Den zum Eigenwert $\mu_1 > 1$ gehörenden Eigenraum nennen wir instabilen Unterraum U^u , $\frac{1}{\mu_1}$ liefert den stabilen Unterraum. Im allgemeinen (d.h., ist H ein hyperbolischer Fixpunkt eines Diffeomorphismus $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) erhalten wir U^u und U^s indem wir sie durch die Verallgemeinerten Eigenräume $E(\lambda)$ der Eigenwerte mit $|\lambda| > 1$ (bzw. $|\lambda| < 1$) aufspannen. Details hierzu findet man z.B. in [I], [PaM] oder [N]. Die invarianten Mannigfaltigkeiten sind lokal immer durch die Unterräume U^u und U^s bestimmt. Es gibt eine offene Umgebung V von H , so daß $W^s(H)(T|_V)$ der Graph einer C^1 -Abbildung $h: B_s(\epsilon) \rightarrow B_u(\epsilon)$ ist (wobei $B_{s(u)}(\epsilon) := \{x \in U^{s(u)} \mid \|x\| < \epsilon\}$). $W^s(H)(T|_V)$ ist insbesondere eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Ihr Tangentialraum in H ist U^s . Ferner haben wir mit $g: B_s(\epsilon) \rightarrow V$, $g(x) = \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung dieser Mannigfaltigkeit. Im allgemeinen kommt es uns nicht auf eine spezielle Umgebung V von H an. Wir schreiben dann kurz W_{loc}^s und nennen dieses die lokale stabile Mannigfaltigkeit. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist $T^{-n}(W^s(H)(T|_V)) \subset W^s(H)$ diffeomorph zu W_{loc}^s und wieder eine eingebettete Mannigfaltigkeit.

Die lokale stabile Mannigfaltigkeit ist stetig von T abhängig (vgl. "The stable manifold theorem" [PaM]). Wir notieren dieses in der folgenden Weise: Sei $T_\mu: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$, $\mu \in [a, b]$ eine stetige Einparameterfamilie von Diffeomorphismen (d.h., ist $|\mu_1 - \mu_2|$ klein, so ist auch $\|T_{\mu_1} - T_{\mu_2}\|^1$ klein, wobei $\|\cdot\|^1$ die C^1 -Norm bezeichnet: $\|f\|^1 := \sup_{x \in U} \{ |f(x)|, \|Df|_x\| \}$). Durch H_μ sei eine Familie von hyperbolischen Punkten gegeben.

S a t z 1-3 (Familien invarianter Mannigfaltigkeiten)

Es gibt eine Einparameterfamilie $g_\mu : B_S(\varepsilon) \rightarrow U$ von Parametrisierungen der lokalen stabilen Mannigfaltigkeit W_{loc}^S .

Ferner bildet $T_{g_\mu}^{-n}$ eine Einparameterfamilie von Parametrisierungen für $T^{-n}(W_{loc}^S)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist. ϕ

Natürlich gilt alles in entsprechender Weise für die instabile Mannigfaltigkeit. Dieses gilt insbesondere für Abbildungen der Form $T = S \circ R$. Dann nämlich sind die invarianten Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Fixpunkte zueinander symmetrisch (vgl. auch $|U|$).

L e m m a 1-4 (Symmetrie invarianter Mannigfaltigkeiten)

Seien $R, S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Involutionen und $T = S \circ R$ ein hierdurch definierter Homöomorphismus mit hyperbolischem Fixpunkt $H \in R_0 \cap R_1$.

Dann gilt

$$W^U(H) = S(W^S(H)) = R(W^S(H)).$$

Beweis:

Ist $x \in W^U$, so geht $T^{-n}(x)$ gegen H . Da $ST^nS = T^{-n}$, geht also $T^nS(x)$ gegen $S(H)$. Es ist aber $S(H) = H$, also gilt $S(x) \in W^S$. Alles weitere folgt analog. $\$$

Man beachte, daß für unsere Abbildung (1.1) (mit den von uns diskutierten Involutionen) alle Fixpunkte im Schnitt $R_0 \cap R_1$ liegen.

Wir wollen uns nun mit den Schnittpunkten der invarianten Mannigfaltigkeiten beschäftigen, die keine hyperbolischen Fixpunkte sind. Sei also $T : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus (oder PL-Homöomorphismus, vgl. Abschnitt 1.3) und H sowie G ein hyperbolischer Fixpunkt von T .

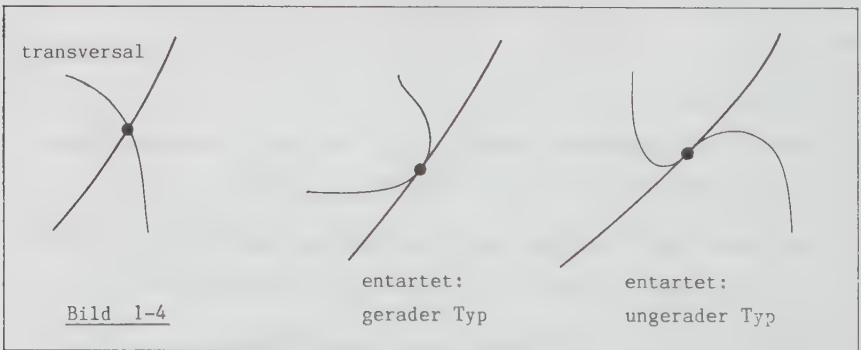
Definition

Ein Punkt $P \in W^S(H) \cap W^U(G)$ im Schnitt der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der Fixpunkte H bzw. G mit $P \neq H$, $P \neq G$ heißt

- a) homoklinisch (homoklin zu H) falls $H = G$,
- b) heteroklinisch (zu H und G) falls $H \neq G$ ist.

Schneiden sich $W^S(H)$ und $W^U(G)$ in P transversal (d.h. für die Tangentialräume gilt im Schnittpunkt $TW^S|_P \oplus TW^U|_P = \mathbb{R}^n$), so nennen wir P kurz transversal homoklinischer (heteroklinischer) Punkt.

In der Situation unseres Lemmas 1-4 gilt offenbar, ist $P \in W^U(H) \cap R_0$ (und $P \neq H$), so ist P ein homoklinischer Punkt. Für R_1 gilt natürlich das Gleiche. Von diesen ausgezeichneten homoklinischen Punkten ausgehend wollen wir nun den Begriff der homoklinischen Verzweigung erklären (dieses Konzept wurde von H.O. Peitgen in [P,2] eingeführt). Wir beschreiben diese Verzweigung als "Verwandlung" eines transversal homoklinischen Punktes über eine Entartung vom ungeraden Typ (vgl. Abbildung 1-4, sowie unsere Klassifizierung auf Seite 41) in mehrere transversal homoklinische Punkte.



Sei $T_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen, die sich als Produkt von Involutionen S_μ, R_μ schreiben läßt, also $T_\mu = S_\mu \circ R_\mu$.

H sei ein hyperbolischer Fixpunkt von T_μ für alle $\mu \in [0,1]$,

E sei ein elliptischer Fixpunkt für alle diese μ .

R_0 sei homöomorph zu einer Geraden und $R_0 \cap R_1 = \{H, E\}$.

Sei $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von R_0 mit $r(-1) = H$, $r(0) = E$ und $R_0^+ = r([0, \infty))$. Sei $R_2^+ = T^{-1}(R_0^+)$.

R_0^+ und R_2^+ teilen $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten. Sei C jene (kegel-artige) Komponente, die den Fixpunkt H nicht enthält. Die Verzweigung wird in genau diesem "Kegel" studiert.

Sei $w_u: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Immersion, die W^u beschreibt und $w_u(0) = H$. Schneidet W^u die Menge C , so gibt es

$$t_0 = \min_{t > 0} \{t \mid w_u(t) \in R_0\} \text{ und } t_2 = \min_{t > 0} \{t \mid w_u(t) \in R_2\}.$$

Sei $W_C^u := w_u([t_2, t_0])$. Entsprechend wird W_C^s definiert. Es ist $W_C^s = R(W_C^u)$ (vgl. Lemma 1-4). Da W_C^u die Mengen R_0, R_1 und R_2 schneidet, haben wir in diesen Schnittpunkten homoklinische Punkte.

Im Schnitt $\text{Prim}(H, \mu) := W_C^s \cap W_C^u$ finden wir also ausgezeichnete homoklinische Punkte (nämlich jene, die durch einen "ersten Schnitt" der invarianten Mannigfaltigkeiten entstehen).

Ein kritischer Parameterwert μ_* heißt nun Punkt homoklinischer Verzweigung, wenn für alle $\varepsilon < 0$ gilt:

$$\text{Prim}(H, \mu_* - \varepsilon) \subset R_0 \cup R_1 \cup R_2$$

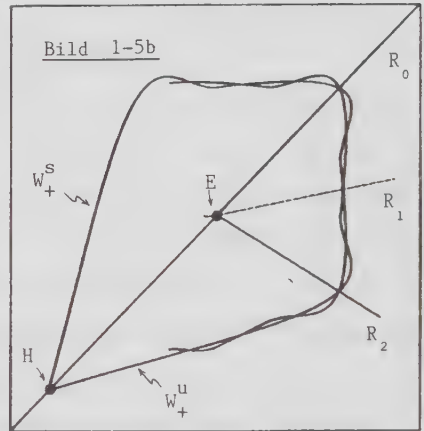
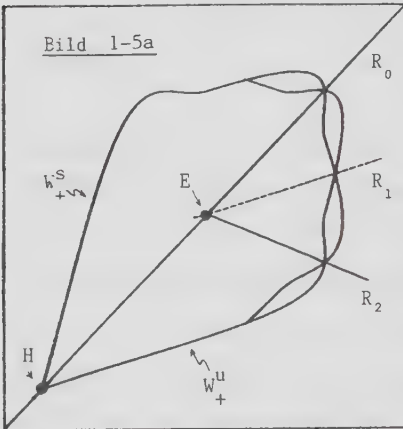
$$\text{Prim}(H, \mu_* + \varepsilon) \not\subset R_0 \cup R_1 \cup R_2.$$

Ferner ist $\text{Prim}(H, \mu_*) \cap R_0$ (oder $\text{Prim}(H, \mu_*) \cap R_1$) entartet vom ungeraden Typ und mit $\text{Bif}(H, \mu) := \text{Prim}(H, \mu) - (R_0 \cup R_1 \cup R_2)$ gilt für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{Bif}(H, \mu_* + \varepsilon) \rightarrow \text{Prim}(H, \mu_*) \cap (R_0 \cup R_2) \text{ oder}$$

$$\text{Bif}(H, \mu_* + \varepsilon) \rightarrow \text{Prim}(H, \mu_*) \cap R_1.$$

Die homoklinischen Punkte auf R_i werden in diesem Zusammenhang auch "Mütter" und die verzweigenden Punkte "Töchter" genannt.



Eine besondere Art homoklinischer Verzweigung liegt vor, wenn für einen Parameter μ_* $W^S = W^U$ gilt. Die invarianten Mannigfaltigkeiten bilden in diesem Fall eine Separatrix. Es ist diese Form der homoklinischen Verzweigung, der wir in unserer Studie in Abschnitt 2.3-2.5 begegnen werden. Die Separatrizen sind in dem Fall PL-Mannigfaltigkeiten. Es ist aber keineswegs so, daß dieses Phänomen auf PL-Abbildungen beschränkt ist (man vergleiche hierzu auch L.J. Laslett, E.M. Mc Millan und J. Moser [LJM]). Wir machen die folgende Beobachtung:

Sei $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und W eine unter S invariante Mannigfaltigkeit, also $S(W) = W$.

Ferner gebe es zu W eine stetige Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

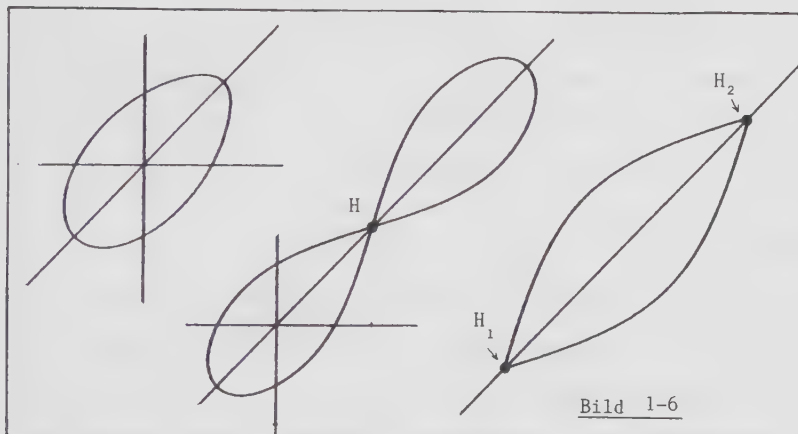
$$\begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \text{es gibt } \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \in W \text{ mit } y_1 + y_2 = g(x).$$

Wir setzen dann

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) - y \\ x \end{pmatrix}.$$

W ist invariant bezüglich $R = S \circ T$, also $R(W) = W$ und es gilt

$$R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = \frac{g(x)}{2} \right\}.$$



W ist unter T und T^{-1} invariant. Das Bild 1-6 zeigt einige Ergebnisse, die man durch unsere Konstruktion erhält. Man beachte, daß wir nicht nur instabile und stabile Mannigfaltigkeiten erhalten. Hierzu muß W noch mindestens einen hyperbolischen Fixpunkt enthalten.

1.3 PL - Abbildungen

Im letzten Abschnitt haben wir die Abbildung T in der Regel als Diffeomorphismus vorausgesetzt. Unsere Rechnungen in Kapitel II werden wir jedoch zum großen Teil an einem stückweise linearen Modell durchführen. Wir stellen einige Begriffe zusammen (eine recht kompakte Einführung findet sich z.B. bei Eaves [E]).

Eine Menge M mit Triangulierung T (der homogenen Dimension k) nennen wir PL-Mannigfaltigkeit (der Dimension k), sofern alle

$(k-1)$ -Simplizes von T Seiten von höchstens zwei k -Simplizes sind. Eine PL-Abbildung ist eine stetige Abbildung $T : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer PL-Mannigfaltigkeit M (mit Triangulierung T), die auf allen Simplizes der Triangulierung affin ist. Ist eine PL-Abbildung $T : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ nicht nur stetig, sondern ein Homöomorphismus (wir sagen kurz PL-Homöomorphismus), so induziert T auf $T(M)$ die Triangulierung $T(T) := \{\sigma \subset \mathbb{R}^m \mid T^{-1}(\sigma) \in T\}$. $T(M)$ ist also wieder eine PL-Mannigfaltigkeit.

L e m m a 1-5 (Iteration von PL - Abbildungen)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine PL-Mannigfaltigkeit mit Triangulierung T und $T : M \rightarrow M$ ein PL-Homöomorphismus. Dann ist $T^k : M \rightarrow M$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein PL-Homöomorphismus.

Beweis:

Es genügt $k = 2$ zu betrachten. $T(T)$ ist eine Triangulierung von $T(M) \subset M$. Dann gibt es eine gemeinsame Verfeinerung T^2 zu T , $T(T)$ und $T^{-1}(T^2)$ ist eine Triangulierung von M , auf deren Simplizes T^2 eine affine Abbildung ist. Also ist T^2 ein PL-Homöomorphismus. §

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine PL-Mannigfaltigkeit mit Triangulierung T der Dimension n . Sei $T : M \rightarrow M$ ein PL-Homöomorphismus und P ein Fixpunkt von T . Ist $P \in \sigma \in T$ und σ ein n -Simplex, so können wir schreiben

$$T|_{\sigma}(x) = L_{\sigma} \cdot (x - P) + P,$$

wobei L_{σ} eine reguläre $n \times n$ -Matrix ist. Sei $K := \{\sigma^n \in T \mid P \in \sigma^n\}$.

Wir wollen P einen (einfachen) hyperbolischen Fixpunkt nennen, falls für $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ stets $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_2} = L$ gilt und für die Eigenwerte λ_i von L stets $|\lambda_i| \neq 1$ erfüllt ist.

B e m e r k u n g

Wir nennen P entartet, falls es $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ gibt, sodaß $L_{\sigma_1} \nmid L_{\sigma_2}$ ist.

Diesen Fall werden wir nicht betrachten!

$L_{\sigma_1} \nmid L_{\sigma_2}$ kann zu sehr pathologischen Situationen führen. Als einfaches

Beispiel hierfür betrachten wir $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $U^{+(-)} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq (\leq) 0 \right\}$

und

$$T|_{U^+} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad T|_{U^-} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

mit $b < 1$, $a_1 > 1$, $a_2 < 1$. Man ist geneigt, O einen hyperbolischen

Fixpunkt zu nennen. Während aber in U^+ eine stabile und eine

instabile Mannigfaltigkeit zu liegen scheint, gibt es in U^- keine instabile

Mannigfaltigkeit. Wir wollen solche Situationen ausschließen. Eine gut-

artige Situation erhalten wir auch, wenn die L_{σ_i} zueinander ähnlich sind.

Dann könnte man ein L_{σ_k} auszeichnen und im übrigen alle L_{σ_i} durch Ähn-

lichkeitstransformationen in die Gestalt von L_{σ_k} bringen. Man wäre also

wieder in der einfachen lokalen linearen Situation. Wir studieren daher

nur diese.

Sei nun H ein einfacher hyperbolischer Fixpunkt des PL-Homöomorphis-

mus T , dann können wir die zugehörige stabile und instabile Mannigfaltig-

keit studieren. Sei $K := \{\sigma^n \in T \mid H \in \sigma^n\}$ und $U = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Da

$$T|_U = L \cdot (x - H) + H$$

ist, gilt für die invarianten Mannigfaltigkeiten von $T|_U$

$$W^S(H) = (U^S + H) \cap U$$

$$W^U(H) = (U^U + H) \cap U,$$

wobei U^S und U^U die stabilen und instabilen Unterräume (wie im letzten

Abschnitt beschrieben) darstellen. Die invarianten Mannigfaltigkeiten der

auf U eingeschränkten Abbildung nennen wir lokale invariante Mannigfaltig-

keiten. Unsere Aussagen über die lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten für Diffeomorphismen gelten natürlich auch für PL-Höomorphismen. Insbesondere hängen die Mannigfaltigkeiten von T stetig ab. Unser Satz 1-3 gilt also auch für Familien von PL-Abbildungen $T_\mu : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$, $\mu \in [a, b]$, wobei wir voraussetzen, daß die T_μ zugrunde liegende Triangulierung von U für alle $\mu \in [a, b]$ gleich bleibt.

1.4 Abbildungsgrad und Schnitte von Zellen

Es ist unser Ziel ein globales Sekundärverzweigungsergebnis mit Abbildungsgradargumenten zu beweisen. Dazu werden wir den Abbildungsgrad einer Abbildung $f-g$ betrachten. Wir stellen uns vor, daß durch f und g Mannigfaltigkeiten (bzw. Zellen auf Mannigfaltigkeiten) beschrieben werden. Die Nullstellen von $f-g$ beschreiben dann die Schnitte dieser Zellen. Wir werden diesen Schnitten den Abbildungsgrad von $f-g$ als Schnittzahl zuordnen (eine sehr geometrische Einführung von Schnittzahlen findet man bei Guillemin und Pollack [GP], Grundzüge der Abbildungsgradtheorie werden z.B. von K. Deimling in [D] beschrieben). Wir stellen einige Aussagen über den Abbildungsgrad zusammen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, offen und beschränkt. Mit $D_y(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Abbildungen $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $y \notin f(\partial\Omega)$. Dann gibt es eine Abbildung (Brouwer Grad)

$$\deg(\cdot, \Omega, y) : D_y(\Omega) \rightarrow \mathbb{Z}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Normalisierung

$$y \in \Omega \implies \deg(\text{Id}, \Omega, y) = 1$$

(2) Additivität

Sei $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ offen, $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Ist $f|_{\Omega_1} \in D_y(\Omega_1)$ und $f|_{\Omega_2} \in D_y(\Omega_2)$, so gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y).$$

(3) Homotopieinvarianz (Stetigkeit)

Sei $h: \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $h(\cdot, t) \in D_y(\Omega)$ für alle $t \in [0, 1]$, dann ist

$$\deg(h(\cdot, t), \Omega, y) = \text{const}(t).$$

(4) Translationsinvarianz

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0).$$

Die Eigenschaften charakterisieren die Abbildung eindeutig (vgl. Amann, Weiss |AW|).

Ist f differenzierbar und $0 \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert, so gilt

$$\deg(f, \Omega, 0) = \sum_{f(x)=0} \text{sign det } Jf|_x,$$

wobei wir mit $Jf|_x$ wieder die Jacobi-Matrix bezeichnen.

Ist $0 \in \mathbb{R}^n$ kein regulärer Wert, so können wir zu einem regulären Wert ε übergehen (nach Brown - Sard liegen die regulären Werte dicht im $\mathbb{R}^n$) und haben $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, \varepsilon)$. Ist f nicht differenzierbar, so können wir mit glatten Abbildungen $\tilde{f}$ approximieren (Mollifier - Lemma) und haben wiederum $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(\tilde{f}, \Omega, 0)$.

Der Abbildungsgrad ist ein "Maß" für die Anzahl der Lösungen von $f(x) = y$. Insbesondere gilt die

Lösungseigenschaft:

$$\deg(f, \Omega, y) \neq 0 \implies \text{es gibt } x \in \Omega \text{ mit } f(x) = y.$$

Seien $K_i, i = 1, 2, \dots$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von

$\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Für $y \in K_i$ ist $\deg(f, \Omega, y)$ konstant; wir können also sinnvoll $\deg(f, \Omega, K_i)$ schreiben. Ist nun $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $g \circ f \in D_y(\Omega)$, so gilt die

Produkteigenschaft:

$$\deg(g \circ f, \Omega, y) = \sum_i \deg(f, \Omega, K_i) \cdot \deg(g, K_i, y)$$

(dabei sind nur endlich viele Summanden von Null verschieden).

Für Homöomorphismen $h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ folgt hieraus

$$y \in h(\Omega) \implies \deg(h, \Omega, y) = \pm 1,$$

denn

$$\deg(\text{Id}, \Omega, h^{-1}(y)) = \deg(h, \Omega, y) \cdot \deg(h^{-1}, \Omega, h^{-1}(y)) = 1.$$

Hin und wieder werden wir die folgende einfache Reduktionseigenschaft benutzen. Sei $f \in D_y(\Omega_1)$ und $\text{Id} : \bar{\Omega}_2 \rightarrow \bar{\Omega}_2$ die Identitätsabbildung, $\Omega_2 \in \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt. Dann gilt mit $z \in \Omega_2$

$$\deg((f, \text{Id}), \Omega_1 \times \Omega_2, (y, z)) = \deg(f, \Omega_1, y).$$

Mit Hilfe des Abbildungsgrades definieren wir nun eine Schnittzahl.

Seien $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \in \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt. Sei $N = n+m$ und seien

$$f : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

$$g : \bar{\Omega}_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$$

stetige Abbildungen. Uns interessiert die Menge der Schnitte von f und g , also $f(\bar{\Omega}_1) \cap g(\bar{\Omega}_2)$. Für die Schnittpunkte muß $f(x) = g(y)$ gelten. Sei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$. Wir setzen voraus, daß im Rand keine Schnittpunkte liegen, d.h.

$$(x, y) \in \partial\Omega \implies f(x) \neq g(y).$$

Dann können wir sinnvoll definieren:

Definition

Die Zahl $S(f, g) := \deg(f(x) - g(y), \Omega_1 \times \Omega_2, 0)$ nennen wir

Schnittzahl von f und g .

Wir stellen einige Eigenschaften dieser Zahl zusammen:

Lemma 1-6 (Eigenschaften der Schnittzahl)

- a) Ist $S(f, g) \neq 0$, so gibt es $(x, y) \in \Omega$ mit $f(x) = g(y)$.
- b) $S(f, g) = (-1)^{N+n \cdot m} \cdot S(g, f)$,
im Spezialfall $n = m$ gilt also
 $S(f, g) = (-1)^n \cdot S(g, f)$.
- c) Seien $i_{1(2)} : \bar{\Omega}_{1(2)} \rightarrow \mathbb{R}^N$ Inklusionen, also $i_1(x) = (x, 0)$
und $i_2(y) = (0, y)$. Sei $0 \in \Omega$. Dann gilt
 $S(i_1, i_2) = (-1)^m$.
- d) Seien $h_{1(2)} : \bar{\Omega}_{1(2)} \rightarrow \bar{\Omega}_{1(2)}$ Homöomorphismen und $x \in \Omega_1$,
 $x \in \Omega_2$, dann gilt
 $S(f \circ h_1, g \circ h_2) = S(f, g) \cdot \deg(h_1, \Omega_1, x) \cdot \deg(h_2, \Omega_2, y)$.
- e) Sei $T : \bar{U} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Diffeomorphismus oder PL-Homöomorphismus, U offen und beschränkt, $z \in T(U)$. Sei ferner $f(\Omega_1) \subset U$
und $g(\Omega_2) \subset U$. Dann gilt
 $S(T \circ f, T \circ g) = \deg(T, U, z) \cdot S(f, g)$.

Beweis:

- a) Dieses folgt unmittelbar aus der Lösungseigenschaft des Abbildungsgrades.
- b) Es gilt $g - f = -\text{Id}(f - g)$. Also folgt die Behauptung aus
 $\deg(g - f, \Omega_1 \times \Omega_2, 0) = \deg(-\text{Id}(f - g), \Omega_1 \times \Omega_2, 0)$
 $= \deg(f - g, \Omega_1 \times \Omega_2, 0) (-1)^N = \deg(f - g, \Omega_2 \times \Omega_1, 0) (-1)^{N+n \cdot m}$.

c) Dieses ist offensichtlich, da

$$J(i_1 - i_2)|_0 = \begin{pmatrix} \text{Id}_1 & 0 \\ 0 & -\text{Id}_2 \end{pmatrix}$$

ist, wobei Id_1 und Id_2 $n \times n$ bzw. $m \times m$ Einheitsmatrizen sind.

d) Sei $h: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ der durch $h(x, y) = (h_1(x), h_2(y))$ definierte Homöomorphismus und $(x, y) \in \Omega$. Es gilt

$$\deg(f \circ h_1 - g \circ h_2, \Omega, 0) = \deg(f - g, \Omega, 0) \cdot \deg(h, \Omega, (x, y)).$$

Sei $H_1(x, y) = (h_1(x), y)$ und $H_2(x, y) = (x, h_2(y))$, dann ist $h = H_1 \circ H_2$. Die Behauptung folgt dann aber aus der einfachen Reduktionseigenschaft des Abbildungsgrades.

e) Wir können annehmen, daß f und g glatte Abbildungen sind und 0 regulärer Wert von $f - g$ (anderenfalls würden wir geeignet approximieren und dann mit $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ rechnen). Da

$$f(x) - g(y) = 0 \iff Tf(x) - Tg(y) = 0$$

ist, gilt (sofern T ein Diffeomorphismus ist)

$$\begin{aligned} \deg(Tf - Tg, \Omega, 0) &= \sum_{f(x) - g(y) = 0} \text{sign det}(JT|_{f(x)} \cdot Jf|_x - JT|_{g(y)} \cdot Jg|_y) \\ &= \sum_{f(x) - g(y) = 0} \text{sign det } JT|_{f(x)} \cdot \text{sign det}(Jf|_x - Jg|_y) \\ &= \deg(T, U, z) \cdot S(f, g). \end{aligned}$$

Ist T ein PL-Homöomorphismus, so müssen wir beachten, daß $f(x) = g(y)$ auf einem $(N-1)$ -Simplex liegen könnte. Dann aber können wir zu $\tilde{f} = f + \bar{\varepsilon}$ und $\tilde{g} = g + \bar{\varepsilon}$ übergehen. Wir benutzen $\bar{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^N)$. Man kann zeigen, daß es zu $x_0 \in \sigma^{N-1}$ ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, sodaß für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $x_0 + \bar{\varepsilon}$ nicht auf einem $(N-1)$ -Simplex der Triangulierung von $\bar{U}$ liegt.

Wir übergehen diese Details und verweisen auf $|E|$ oder $|JS, 1|$.

Die von uns zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten (bzw. Zellen auf den Mannigfaltigkeiten, z.B. die lokalen stabilen Mannigfaltigkeiten) können stets durch Diffeomorphismen oder PL-Homöomorphismen parametrisiert werden. Sind f_1, g_1 und f_2, g_2 verschiedene Parametrisierungen, so besagt unser Lemma (Teil d), daß die Schnitzzahl bis auf das Vorzeichen bestimmt ist.

Seien nun $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ injektive Abbildungen. Ist $f(x_0) = g(y_0) = P \in \mathbb{R}^N$, so hat P genau ein Urbild in Ω , nämlich (x_0, y_0) . Gibt es eine offene Umgebung $B \subset \Omega$ von (x_0, y_0) , sodaß für alle $(x, y) \in B - \{(x_0, y_0)\}$ gilt $f(x) \neq g(y)$, dann können wir definieren:

Definition

Die Zahl $I(f, g, P) := \deg(f(x) - g(y), B, 0)$ nennen wir den Index von P bzgl. f und g .

Mit dem so erklärten Index können wir nun homoklinische Punkte etwas präziser klassifizieren als dieses durch die Abbildung 1-4 geschehen ist. Transversal homoklinische Punkte haben den Index ± 1 . Entartet homoklinische Punkte (die invarianten Mannigfaltigkeiten sind im Schnittpunkt tangential oder, im PL-Fall, schneiden sich in einer "Knickstelle") nennen wir

- von ungeradem Typ, wenn der Index $\neq 0$ ist
- von geradem Typ, wenn der Index $= 0$ ist.

Wir betrachten noch einmal die von uns beschriebene homoklinische Verzweigung. Die homoklinischen Punkte $P \in \text{Prim}(H, \mu)$ der primären Struktur haben stets einen Index ± 1 . In der Situation der Abbildung 1-5 wechselt jedoch der Index des homoklinischen Punktes auf R_1 sein Vorzeichen. Der Indexwechsel ist in dem von uns studierten Rahmen typisch. Wir werden dieses im nächsten Abschnitt genauer diskutieren.

1.5 Grundlegende Hilfssätze

Unsere Überlegungen zur Verzweigung von Schnittpunkten zweier Mannigfaltigkeiten basieren auf einem von P. Rabinowitz [R] 1971 vorgestellten Verzweigungsprinzip. Der folgende Satz stellt das topologische Kondensat dieses Prinzips (wie es von H.O. Peitgen in [P,1] genauer beschrieben wird) dar.

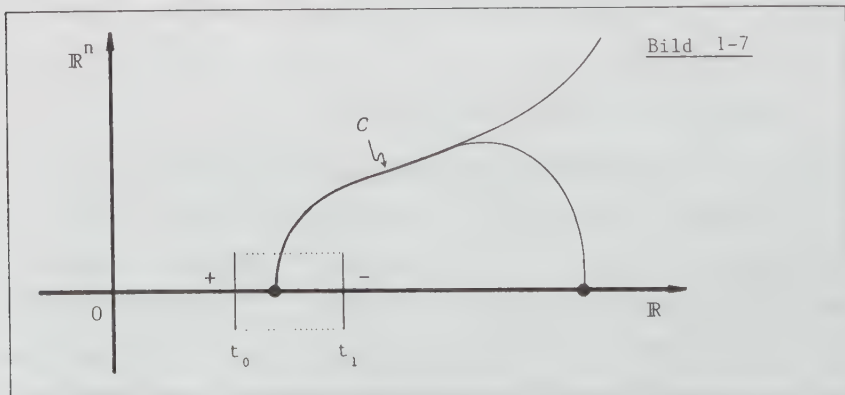
Satz 1-7 (Rabinowitz und Krasnoselskii)

Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung und $F(x, t) = 0$ für $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $L := \{(x, t) \mid F(x, t) = 0, x \neq 0\}$ die Menge der nichttrivialen Lösungen. Sei $(0, t_0) \notin \bar{L}$ und $(0, t_1) \notin \bar{L}$. Zwischen t_0 und t_1 finde ein Indexwechsel statt, d.h. für alle hinreichend kleinen Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^n$ des Nullpunktes gelte

$$\deg(F(\cdot, t_0), U, 0) \neq \deg(F(\cdot, t_1), U, 0).$$

Dann enthält die abgeschlossene Menge $\bar{L}$ eine Komponente C (zusammenhängend und abgeschlossen), die einen Punkt $(0, t)$ mit $t \in (t_0, t_1)$ enthält und für die gilt:

- (a) C ist in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ unbeschränkt
oder
(b) es gibt einen Punkt $(0, t) \in C$ mit $t \notin [t_0, t_1]$.



Seien nun $\Omega_{1(2)} \subset \mathbb{R}^{n(m)}$ offene, beschränkte Umgebungen der Null.
 Seien ferner $f_\mu : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $g_\mu : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ Einparameterfamilien von
 Parametrisierungen zugehöriger C^1 - (oder PL-) Untermannigfaltigkeiten
 $F_\mu \subset \mathbb{R}^N$ und $G_\mu \subset \mathbb{R}^N$. Sei $\mu \in [a, b]$ und $N = n + m$.
 Ferner wollen wir annehmen, daß $P_\mu := f_\mu(0) = g_\mu(0)$ für alle $\mu \in [a, b]$
 gilt.

Sei $P := \{ (P_\mu, \mu) \mid \mu \in [a, b] \}$ die Menge der "trivialen" Schnitte (Mütter)
 und $D := \{ (P, \mu) \mid \mu \in [a, b], P \in G_\mu \cap F_\mu, P \neq P_\mu \}$ die Menge der
 "nichttrivialen" Schnitte (Töchter).

L e m m a 1-8 (Verzweigung von Schnitten)

Seien $(P_{\mu_0}, \mu_0) \notin \bar{D}$ und $(P_{\mu_1}, \mu_1) \notin \bar{D}$ und der Index von P_{μ_0} und
 P_{μ_1} verschieden:

$$I(g_{\mu_0}, f_{\mu_0}, P_{\mu_0}) \neq I(g_{\mu_1}, f_{\mu_1}, P_{\mu_1}) .$$

Dann existiert eine Komponente $K \subset \bar{D}$, die einen Punkt (P_{μ_*}, μ_*)
 mit $\mu_* \in (\mu_0, \mu_1)$ enthält und für die gilt:

(a) Es gibt einen Punkt $(Q, \mu) \in K$ mit

$$Q \in f_\mu(\partial\Omega_1) \cup g_\mu(\partial\Omega_2) \text{ oder } \mu \in \{a, b\} .$$

oder

(b) Es gibt einen Punkt $(P_\mu, \mu) \in K$ mit $\mu \notin [\mu_0, \mu_1]$.

Mit unserem Lemma haben wir insbesondere die Verzweigung homoklini-
 scher Punkte beschrieben. Ist nämlich $T_\mu : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow U$ eine Einparameter-
 familie (vgl. Satz 1-3) von Diffeomorphismen (bzw. PL-Homöomorphismen),
 so haben wir gesehen, daß die invarianten Mannigfaltigkeiten von μ stetig
 abhängen. Wir interpretieren also $F_\mu \subset W^u(H_\mu)$ und $G_\mu \subset W^s(H_\mu)$ als
 Zellen auf den invarianten Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Fixpunk-
 tes H_μ und f_μ, g_μ als eine Parametrisierung dieser

Zellen. P_μ ist dann eine Familie ausgezeichneter homoklinischer Punkte. Unser Satz besagt also, ändert der homoklinische Punkt P_μ zwischen μ_0 und μ_1 seinen Index, so gibt es in (μ_0, μ_1) einen Punkt μ_* homoklinischer Verzweigung. Das Kontinuum der verzweigenden homoklinischen Punkte (Töchter) ist unbeschränkt oder kehrt für einen Parameter $\mu \notin [\mu_0, \mu_1]$ zu den "Müttern" zurück.

Beweis von Lemma 1-8:

Unser Satz ist offenbar eine direkte Folgerung aus dem Satz 1-7. Die Aussage, die wir dort für die Lösungen der Gleichung $f_\mu(x) - g_\mu(y) = 0$ gemacht haben, übersetzen wir lediglich in eine Aussage über die entsprechenden Schnitte. Wir haben daher nur zu zeigen, daß P und D zu geeigneten Mengen in $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2 \times [a, b]$ homöomorph sind.

Sei $M := \overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2 \times [a, b]$,

$$E := \{(x, y, \mu) \in M \mid g_\mu(x) - f_\mu(y) = 0, \quad x \neq 0, y \neq 0\} \quad \text{und}$$

$$Q := \{(x, y, \mu) \in M \mid x = 0, y = 0\}.$$

Sei ferner $h : \overline{E} \cup \overline{Q} \rightarrow \overline{D} \cup \overline{P}$ durch $h(x, y, \mu) = (f_\mu(x), \mu)$ definiert.

h ist der von uns benötigte Homöomorphismus. Man rechnet sofort nach, daß $h^{-1} : \overline{D} \cup \overline{P} \rightarrow \overline{E} \cup \overline{Q}$ mit $h^{-1}(P, \mu) = (\tilde{f}_\mu^{-1}(P), \tilde{g}_\mu^{-1}(P), \mu)$ die Umkehrabbildung zu h ist. $\tilde{f}_\mu^{-1}$ und $\tilde{g}_\mu^{-1}$ sind dabei die Umkehrabbildungen von f_μ und g_μ . Da f_μ und g_μ Homöomorphismen sind, ist sowohl h als auch h^{-1} stetig.

Es gilt $h(Q) = P$ und $h(E) = D$. In $\overline{E}$ finden wir eine Komponente C , für die (a) oder (b) des Satzes 1-7 gilt. Mit $K = h(C)$ haben wir die gesuchte Komponente in $\overline{D}$ gefunden, für die dann (a) oder (b) gilt.

§

Das von uns im folgenden Kapitel diskutierte Verzweigungsergebnis für asymmetrische Geisterlösungen beruht neben dem eben vorgestellten Satz auf der Übertragung der Schnittzahl von einem Schnitt (einem homo-

klinischen Punkt) auf einen benachbarten (die Lösung charakterisierenden) Schnitt. Die Übertragung von Schnitzzahlen betrachten wir in der folgenden Situation:

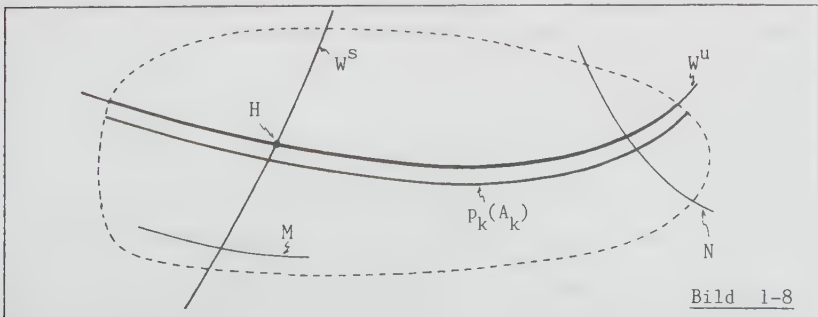
- Die stabile Mannigfaltigkeit W^S eines hyperbolischen Fixpunktes H wird von einer Mannigfaltigkeit M (transversal) geschnitten.
- Die instabile Mannigfaltigkeit W^U wird von einer weiteren Mannigfaltigkeit N geschnitten.

Iterieren wir nun die Mannigfaltigkeit M , d.h. betrachten wir die Bilder $T^i(M)$, so stellen wir fest, daß $T^i(M)$ die instabile Mannigfaltigkeit approximiert. Das λ -Lemma von Palis (vgl. [PaM]) präzisiert diese Feststellung für C^k -Mannigfaltigkeiten (und transversalem Schnitt $W^S \cap M$). Während aber dieses Lemma herausstellt, daß sich $T^i(M)$ und W^U im C^1 -Sinne nahe kommen, wollen wir hervorheben, daß die Schnitzzahlen von $T^i(M) \cap N$ und $W^U \cap N$ gleich sind.

Sei also $T : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein Diffeomorphismus (PL-Homöomorphismus) und V eine beschränkte Umgebung eines hyperbolischen Fixpunktes H . Die lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten W_{loc}^u und W_{loc}^s seien durch

$$\begin{aligned} w_u : \bar{B}_1 &\rightarrow \bar{V} \\ w_s : \bar{B}_2 &\rightarrow \bar{V} \end{aligned}, \quad B_{1,2} := \{x \in \mathbb{R}^{n,m} \mid \|x\| < 1\}, \quad k = n+m,$$

parametrisiert. Ferner seien $p : \bar{B}_1 \rightarrow \bar{V}$ und $q : \bar{B}_2 \rightarrow \bar{V}$ Parametrisie-



rungen zweier Zellen M und N (Für das folgende Lemma wäre es hinreichend, wenn p und q nur stetig wären).

Die Iteration von M wollen wir nur auf V betrachten und erklären daher die

Eingeschränkte Iteration (1.3).

Sei $A_0 := B_1$ und $p_0 := p$. Dann definieren wir für $i = 1, 2, \dots$

$$A_i := p_{i-1}^{-1}(T^{-1}(V)) \subset A_{i-1}$$

$$p_i : A_i \rightarrow V, \quad p_i(x) = T \circ p_{i-1}(x).$$

p_i ist also die auf $A_i \subset B_1$ eingeschränkte Abbildung $T^i \circ p$, deren Bildbereich gerade in V liegt.

Wir wollen nun annehmen, daß für alle $k > 0$ gilt

$$I(w_s, w_u, H) = S(w_s, p^k),$$

d.h. T soll die Orientierung auf der stabilen Mannigfaltigkeit nicht ändern.

Lemma 1-9 (Schnittzahlübertragung)

Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ gilt

$$S(p^k, q) = S(w_u, q).$$

Im wesentlichen ist diese Aussage eine Konsequenz der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades. Da der Beweis jedoch recht technisch und für das Weitere unwesentlich ist, verlegen wir diesen und die Diskussion der folgenden Bemerkungen in den Anhang B.

Bemerkungen

1. Schneiden sich w_s und p in nur einem Punkt P transversal (betrachten wir PL-Abbildungen, so genügt es $I(p, w_s, P) = \pm 1$ vorauszusetzen) und schneiden sich auch w_u und q transversal (im Punkte Q),

so gibt es eine Umgebung $A \subset V$ von Q und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß sich p^k und q in A für alle $k \geq k_0$ in nur einem Punkt Q^k schneiden.

Dann ist

$$I(p^k, q, Q^k) = I(w_u, q, Q).$$

Aus dem λ -Lemma von Palis folgt, daß dieser Schnitt wieder transversal ist.

2. Ist $q^m : \overline{B}_2 \rightarrow \overline{V}$ eine Folge stetiger Abbildungen, deren Bilder $\text{Im } q^m$ gegen $\text{Im } q$ konvergieren und für die $S(w_u, q^m) = s_1 = \text{const}$ gilt, so gibt es $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $m \geq m_0, k \geq k_0$

$$S(p^k, q^m) = s_1$$

gilt. Die Bemerkung 1. gilt in diesem Fall analog.

Kapitel II

Geisterlösungen

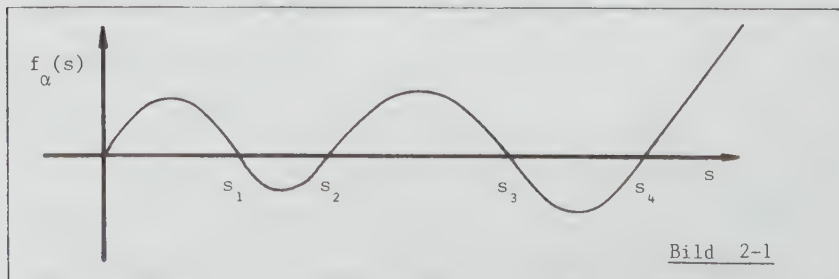
2.1 Isolierte Lösungskontinua, Geister - Typ I

Wir wollen nun damit beginnen, unsere vorbereitenden Überlegungen zu Aussagen über Geisterlösungen zuzuspitzen. Zunächst wollen wir den "Mechanismus" studieren, der zu den Geistern vom Typ I führt. Die grundlegende Idee dabei ist, von heteroklinischen Punkten ausgehend über das λ -Lemma auf Schnitte zu schließen, die diesen Geisterlösungen entsprechen. Diese Schlußweise kann aber zu vielen verschiedenartigen Lösungen führen. Insbesondere ist eine Klassifizierung in Geisterlösungen und "richtige" Lösungen so noch nicht möglich. Wir untersuchen unsere Randwertaufgabe (0.2), bzw. den Homöomorphismus (0.4)

$$T_{\mu}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - \mu f(x) - y \\ x \end{pmatrix}$$

daher zunächst für eine geeignete Familie von Nichtlinearitäten und konkretisieren den von uns in diesem Abschnitt diskutierten Geistertyp. Für eine große Klasse von Nichtlinearitäten zeigen wir dann die Existenz dieser Geisterlösungen.



Als Nichtlinearität wählen wir (vgl. Bild 2-1):

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} x & | \quad x \leq 0 \\ \sin x & | \quad 0 < x \leq \pi \\ (1+\alpha) \sin \frac{\pi-x}{1+\alpha} & | \quad \pi < x \leq \pi(2+\alpha) \\ (1-\alpha) \sin \frac{x-3\pi}{1-\alpha} & | \quad \pi(2+\alpha) < x \leq 3\pi \\ \sin x & | \quad 3\pi < x \leq 4\pi \\ x - 4\pi & | \quad 4\pi < x \end{cases} \quad (2.1)$$

Wir studieren unser Problem in Abhängigkeit von den Parametern α und μ .

In Kapitel 0 haben wir festgestellt, daß das Integral

$$D = \int_{s_1}^{s_2} f_{\alpha}(s) ds$$

entscheidet, ob das Problem (0.2) Lösungen u besitzt, für deren Maximumsnorm $s_1 < \|u\| < s_3$ gilt. Ist $\alpha > 0$, so ist $D < 0$ und es gibt keine solchen Lösungen. Ist $\alpha < 0$, so ist $D > 0$ und Lösungen sind möglich.

Für die Norm $\|u\|$ dieser Lösungen gilt aber $\|u\| > s_m$, wobei

$$\int_{s_1}^{s_m} f_{\alpha}(s) ds = 0 \quad (2.2)$$

ist. Abbildung 2-2 zeigt die Phasenportraits unseres Beispiels für

$\alpha = -.4$, $\alpha = 0$ und $\alpha = .4$. Wir haben jene Phasenkurven gezeichnet, die in die stationären Punkte H_1 und H_2 (siehe Bild) laufen.

Ist $\alpha = 0$, so ist auch $D = 0$. In diesem Fall haben wir zwischen H_1 und H_2 Separatrizen. In das Phasenportrait für $\alpha = -.4$ haben wir noch einige zu den Lösungen der Randwertaufgabe gehörende Phasenkurven eingezeichnet, und zwar C_1 ("untere" Lösung mit $\|u\| < s_1$), C_2 (Brown - Budin Lösung: $s_1 < \|u\| < s_3$) und C_3 ("obere" Lösung mit $\|u\| > s_4$).

Für die gleichen Parameter α haben wir die invarianten Mannigfaltigkeiten der Abbildung T berechnet. Abbildung 2-3 zeigt die Situation, die sich für $\mu = 1$ ergibt. Wir haben also ein recht ähnliches Verhalten.

Bild 2-2

Phasenportraits

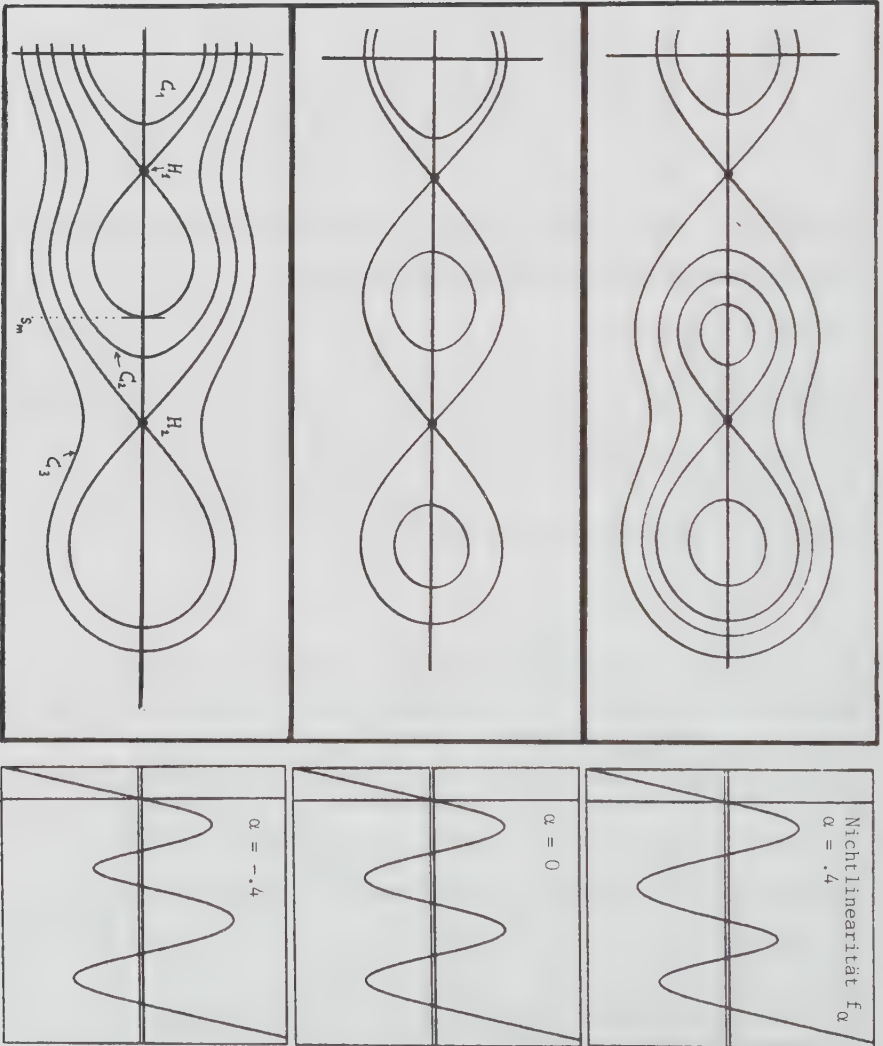
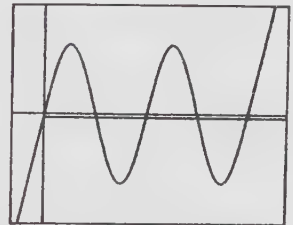
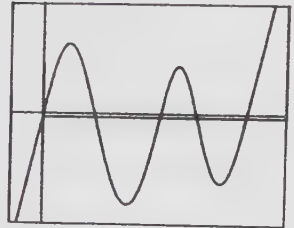
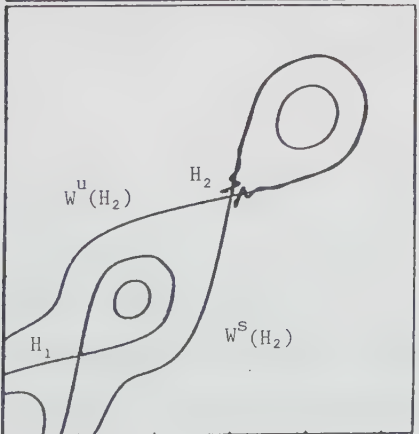
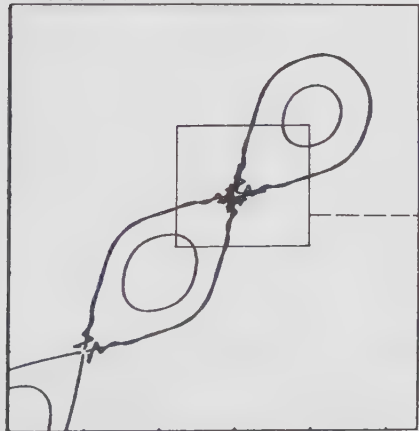
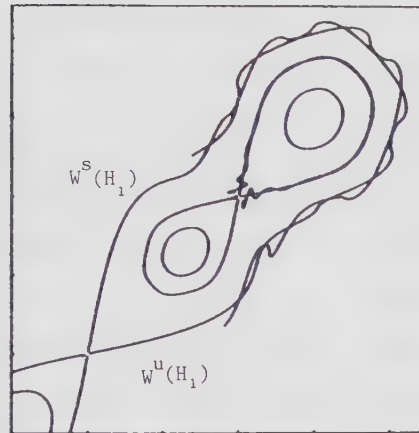
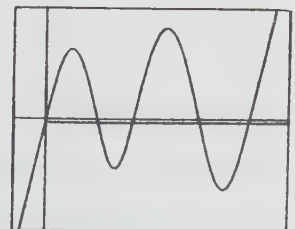


Bild 2-3

invariante Mannigfaltigkeiten ($\alpha = .4, 0, -.4$)



Vergrößerung



Die auffälligste Abweichung ist wohl das transversale Schnittverhalten der Mannigfaltigkeiten $W_-^S(H_2)$ und $W_+^U(H_1)$, sowie $W_+^S(H_1)$ und $W_-^U(H_2)$ für $\alpha = 0$. Mit H_1 und H_2 haben wir dabei die hyperbolischen Fixpunkte $H_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$ und $H_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$ von T bezeichnet. In der Tat ist dieses ($\alpha = 0$) auch der Fall (aus unserer Zusammenstellung in Abbildung 2-3), für den die von uns gesuchten Geister auftreten. Wir wollen dieses präzisieren.

Sei wie üblich $X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 0 \right\}$ und $P_x \in W_-^S(H_1) \cap X$ der "erste Schnittpunkt" der stabilen Mannigfaltigkeit mit der x -Achse. Sei $X^1 \subset X$ eine Umgebung von P_x in X und $L^1 \in X^1$ ein Punkt auf der x -Achse. Mit $X^k := T^{k-1}(X^1)$ und $L^k := T^{k-1}(L^1)$ bezeichnen wir die entsprechenden Iterierten.

Wir führen nun die Projektionen $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein. Ist $P \in \mathbb{R}^2$, so bezeichnen wir von nun an mit $x(P)$ bzw. $y(P)$ die Komponenten von P . Es ist also

$$P = \begin{pmatrix} x(P) \\ y(P) \end{pmatrix}.$$

In Lemma 1-2 haben wir symmetrische Lösungen der Randwertaufgabe durch den Schnitt $T^m(X) \cap R_0$ (bzw. R_1) charakterisiert. Ist $L^{m+1} \in X^{m+1} \cap R_0$, so ist $x = (x(L^1), \dots, x(L^{2m}))$ eine symmetrische Lösung der Randwertaufgabe. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die Betrachtung symmetrischer Lösungen.

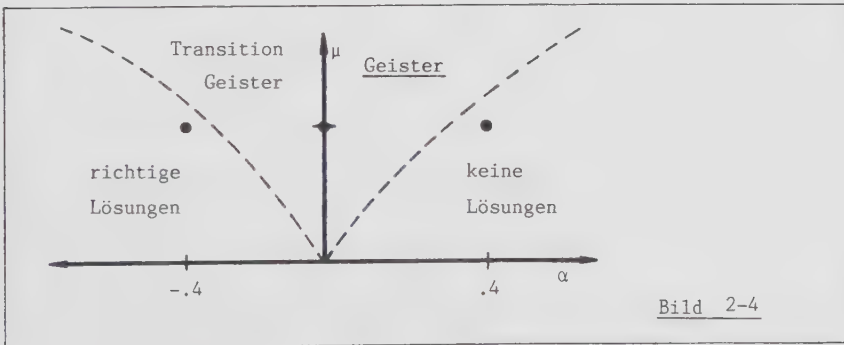
Sei nun $L^{m+1} \in \overline{H_1 H_2} \cap R_0$ und es gelte

$$y(L^i) < x(L^i) \quad \text{für } i = 1, m. \quad (2.3)$$

Dann ist hierdurch eine symmetrische Lösung x charakterisiert, deren Norm $\|x\| = x(L^{m+1})$ ist und für die $s_1 < \|x\| < s_3$ gilt. Wir interessieren uns in diesem Abschnitt nur für solche Lösungen. Ist dabei $\alpha \geq 0$, so haben wir eine Geisterlösung vorliegen.

Wir betrachten noch einmal Abbildung 2-3. Für $\alpha = .4$ ist offensichtlich, daß es keine Lösungen, d.h. Schnitte von X^k und $\overline{H_1 H_2}$ gibt, die (2.3) erfüllen, da $W_+^u(H_1)$ und $W_+^s(H_1)$ diese Strecke "einschließen". In der Tat beweist das im weiteren folgende Lemma 2-2, daß es sehr wohl andere Schnitte (bzw. Lösungen) von $\overline{H_1 H_2}$ und X^k (für hinreichend große k) gibt. Für $\alpha = -.4$ "schließen" $W_-^s(H_2)$ und $W_-^u(H_2)$ den Fixpunkt H_1 und seine invarianten Mannigfaltigkeiten ein. Offenbar gibt es in diesem Fall "richtige" Lösungen.

Es scheint also nur für $\alpha = 0$ (oder für eine passende Umgebung hiervon) Geisterlösungen zu geben, also in dem Fall, in dem wir zu H_1 und H_2 heteroklinische Punkte haben. Wir betrachten nun alle möglichen Parameter $\alpha \in (-1, 1)$ und $\mu > 0$. Es ergibt sich das folgende qualitative Bild (Mit "." haben wir die Parameter für Abbildung 2-3 markiert):



Ist $\alpha < 0$, so finden wir im Prinzip "richtige" Lösungen. Wird μ aber groß, so fällt die Norm einiger dieser Lösungen gegen s_2 ab und verstößt somit gegen (2.2). Wir gehen hierauf in diesem Zusammenhang nicht weiter ein und verweisen auf Abschnitt 2.3. Für $\alpha \geq 0$ sollte es keine Lösungen geben. Zu gegebenem α finden wir aber stets ein (hinreichend großes) μ , für das es Lösungen gibt. Diese Tatsache ist nicht von der speziellen

Gestalt der Abbildung f_α abhängig, sondern nur vom Vorzeichenverhalten.

Wir führen daher die folgende Klasse von Funktionen ein.

Nichtlinearität (2.4)

Mit V_n^1 bezeichnen wir die Menge aller C^1 -Abbildungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (für die entsprechenden PL-Abbildungen schreiben wir V_n^0), für die gilt

- (a) Es gibt Nullstellen $0 = s_0 < s_1 < s_2 \dots < s_n$,
d.h. $f(s_i) = 0$, $i = 0, n$.
- (b) Für $s_0 < x < s_n$ gilt $f(x) \neq 0$, falls $x \neq s_i$, $i = 1, n$,
und $f(x) > 0$, falls $x < s_1$ ist.
- (c) f ist in s_i differenzierbar und $f'(s_i) \neq 0$ ($i = 0, n$).

Eine Funktion $f \in V_n^{0(1)}$ hat also mindestens $(n+1)$ Nullstellen und wechselt das Vorzeichen in eben diesen Nullstellen. Natürlich ist $f_\alpha \in V_4^1$.

Satz 2-1 (Existenz der Geisterlösungen vom Typ I)

Sei $f \in V_4^1$ (oder $f \in V_4^0$) und $T_\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der durch (0.4) definierte Homöomorphismus. Seien X und R_0 wie üblich definiert.

Dann gibt es ein $\mu_0 > 0$, sodaß für $\mu > \mu_0$ gilt,

es existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für $m \geq m_0$ $T^m(X) \cap R_0 \neq \emptyset$ ist.

Ferner gibt es hierzu ein $L^1 \in X$, sodaß $L^{m+1} = T^m(L^1) \in T^m(X) \cap R_0$ ist und die Bedingung (2.3) erfüllt, d.h.

$$s_2 < x(L^{m+1}) < s_3 \quad \text{und} \quad y(L^i) < x(L^i), \quad i = 1, m,$$

ist.

Bemerkung

Natürlich gilt dieser Satz in entsprechender Form auch für die Fixpunktmenge R_1 . Man beachte, daß der Satz keinerlei Flächenbedingungen ent-

hält. Es gibt also auch dann Lösungen, wenn

$$\int_{s_1}^{s_3} f(s) \, ds < 0$$

ist. Dieses sind dann die gesuchten Geisterlösungen.

Der Beweis des Satzes enthält im wesentlichen zwei Komponenten.

Zunächst müssen wir zeigen, daß es überhaupt Lösungen gibt. Dann überlegen wir uns, daß wir die Bedingung (2.3) erfüllen können.

Die Existenz von Lösungen wollen wir aus heteroklinischen Punkten ableiten. Wir kommen also nun zur Beschreibung des Mechanismus, der für die Entstehung der Lösungen verantwortlich gemacht werden kann. Für das Folgende können wir wieder recht allgemeine Voraussetzungen wählen.

$T_\mu : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ sei also wieder ein Diffeomorphismus (bzw. PL-Homöomorphismus), der sich wie üblich als Produkt zweier Involutionen schreiben läßt, d.h. $T = S \circ R$. H_1 und H_2 seien hyperbolische Fixpunkte und $W^S(H_1)$ schneide $X := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \mid y = 0 \}$ im Punkte P_x transversal. $X^1 \subset X$ sei eine Umgebung von P_x in X und $X^{n+1} := T^n(X^1)$.

Lemma 2-2 (Entstehungsmechanismus für Geister vom Typ I)

Es existiere ein zu H_1 und H_2 transversal heteroklinischer Punkt in $W^S(H_2) \cap W^U(H_1)$.

Dann gibt es zu jeder Umgebung V des hyperbolischen Fixpunktes H_2 ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für $n \geq n_0$ gilt

$$X^n \cap R_0 \cap V \neq \emptyset.$$

Bemerkungen

Das Lemma gilt natürlich genauso für die Menge R_1 .

Die gestellte Transversalitätsbedingung ist nicht unbedingt erforderlich.

Es reicht, wenn die entsprechende Schnitzzahl von Null verschieden ist.

Ist Transversalität gegeben, so läßt sich diese auch für $X^n \cap R_0$ erreichen.

Beweis:

Das Lemma ist eine direkte Folgerung aus unserem Lemma 1-9 (und der zugehörigen Bemerkung 1). Wir wenden es zweimal an.

Zunächst gibt es danach ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodaß für $n \geq n_1$ X^n die stabile Mannigfaltigkeit $W^S(H_2)$ in einem Punkt Q^n transversal schneidet.

(Die Punkte Q^n konvergieren dabei gegen den transversalen Schnittpunkt $Q \in W^u(H_1) \cap W^S(H_2)$.) R_0 schneidet $W^u(H_2)$ in H_2 transversal. Wir können unser Lemma also noch einmal auf X^n anwenden und erhalten einen Schnitt in beliebiger Nähe zu H_2 . §

Wir benutzen dieses Resultat zum Beweis von 2-1. Dazu müssen wir offenbar zunächst geeignete heteroklinische Punkte finden.

Beweis von Satz 2-1:

Sei $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid s_1 \leq x, y \leq s_3 \text{ und } y \leq x \right\}$,

$K_x := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \mid x = s_3 \right\}$, $K_y := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \mid y = s_1 \right\}$ und

$K_r := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \mid x = y \right\}$.

Mit W_u bezeichnen wir jene Zusammenhangskomponente von $W^u(H_1) \cap K$, die den Fixpunkt H_1 enthält. Entsprechend sei $W_s \subset W^S(H_2)$ definiert.

Es gilt

$$W_s \cap R_1 = W_s \cap K_x = \{H_2\}.$$

Ist nämlich $P \in W_s \cap R_1$, so ist $T(P) = S(P)$, also $y(T(P)) \geq x(T(P))$ und somit $P \in \{H_1, H_2, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}\}$. Nun ist aber $R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = x - \frac{\mu}{2} f(x) \right\}$.

Es gibt also ein $\mu_1 > 0$, sodaß sich R_1 und K_y für alle $\mu \geq \mu_1$ in einem Punkt Q_y mit $s_2 < x(Q_y) < s_3$ schneiden. Also kann $P = H_1$ oder $P = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$ für $\mu \geq \mu_1$ nicht vorkommen.

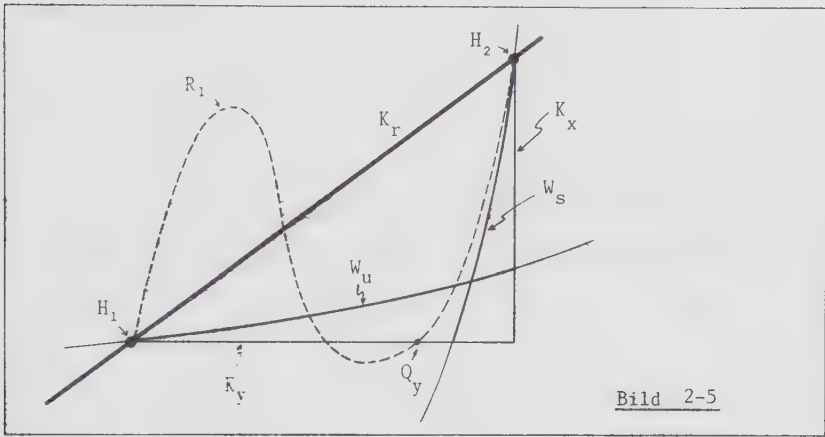


Bild 2-5

Wäre $H_2 \notin P \in W_S \cap K_X$, so müßte $x(T(P)) > s_3$ sein, was aber nicht möglich ist. Für $\mu \geq \mu_1$ schneidet W_S also die Menge $K_Y - \{H_1\}$.

Entsprechend finden wir ein $\mu_2 > 0$, sodaß für $\mu \geq \mu_2$

$$W_U \cap R_{-1} = \{H_1\} = W_U \cap K_Y \quad \text{und} \quad W_U \cap K_X - \{H_2\} \neq \emptyset$$

gilt. Dann aber gibt es für $\mu \geq \max\{\mu_1, \mu_2\}$ in $W_S \cap W_U$ heteroklinische Punkte.

Wir nehmen nun an, daß f differenzierbar ist (für PL-Abbildungen ist das Folgende offensichtlich). Es ist $f'(s_3) < 0$. Sei $s_c < s_3$ gegeben durch $f'(s_c) = 0$ und $f'(x) < 0$ für $s_c < x < s_3$.

Wir bestimmen unser μ_1 nun so, daß $s_1 = s_c - \frac{\mu_1}{2} f(s_c)$ gilt.

Für $s_c < x < s_3$ ist die "Ableitung" von R_1 dann größer als eins, d.h.

ist $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ ein Tangentialvektor von R_1 im Punkte P , so ist

$r(P) := \frac{dy}{dx} > 1$. Wir sehen uns nun die Tangentialvektoren der Mannig-

faltigkeit W_S an. Sei also $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ ein Tangentialvektor im Punkte

$P \in W_S$. Wir setzen $w(P) := \frac{dy}{dx}$. Da $w(H_2) > 1$ ist, gilt dieses auch

für $P \in W_S$, die hinreichend nahe bei H_2 sind. Wir zeigen nun, daß

dieses für alle $P \in W_S$ gilt.

Es reicht zu zeigen, daß

$$w(P) > 1 \implies w(T^{-1}(P)) > 1$$

gilt. Nun ist aber

$$2 \cdot r(Q) = w(T^{-1}(P)) + \frac{1}{w(P)}$$

(vgl. Abschnitt 0.2), wobei $Q \in R_1$ durch $x(Q) = x(T^{-1}(P))$ bestimmt ist. Da $\frac{1}{w(P)} < 1$ gilt, muß dann aber $w(T^{-1}(P)) > 1$ sein. Man beachte noch, daß hieraus auch folgt, daß $w(P) < \infty$ für $P \in W_s$ ist.

Wir können nun in entsprechender Weise für W_u vorgehen. W_s und W_u schneiden sich also transversal. In gleicher Weise finden wir, daß $W^S(H_1)$ die x -Achse transversal schneidet. Unser Lemma 2-2 liefert uns dann die gewünschten Schnitte von X^n und R_0 . Es bleibt zu zeigen, daß diese Schnitte die Bedingung (2.3) erfüllen können.

Wir argumentieren nun so. $\tilde{f}$ sei die Abbildung aus $V_3^{o(n)}$, für die gilt:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & | \quad x \leq s_3 \\ (x - s_3) f'(s_3) & | \quad x > s_3 \end{cases}.$$

Unsere bisherigen Überlegungen gelten offenbar genauso für $\tilde{f}$ wie für f . Insbesondere schneiden sich X^n und R_0 . Nun haben wir aber $\tilde{f}$ so gewählt, daß R_0 von X^n nicht für $x > s_3$ geschnitten werden kann. X^n schneidet also $\overline{H_1 H_2}$. Dann gibt es aber $L^n \in X^n \cap R_0$, für die $y(L^i) < x(L^i)$, $i = 1, n-1$, gilt. Da dann aber $x(L^n) < s_3$ gilt, können wir die gleiche Lösung auch für f finden. §

Zum Abschluß wollen wir noch einige interpretierende Bemerkungen treffen. Schneiden sich $W_+^u(H_1)$ und $W_-^S(H_2)$ nicht (wir wollen hiermit vorübergehend einmal nur jene Zusammenhangskomponenten bezeichnen, die mit den hyperbolischen Fixpunkten in der Halbebene $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y \leq x \right\}$ liegen), so haben

wir gesehen, daß es keine Lösungen der von uns gesuchten Form gibt. Schnei-
den sich diese aber transversal, so haben wir bewiesen, daß es Lösungen
gibt. Die Entstehung eines Schnittes von $W_+^u(H_1)$ und $W_-^s(H_2)$ ist aber
nichts anderes als die Verzweigung bestimmter heteroklinischer Punkte.
In diesem Sinn führt die Verzweigung heteroklinischer Punkte zu den von
uns gesuchten Geisterlösungen. Abbildung 2-6 zeigt diese Situation, die
für $\alpha = .4$ bei $\mu \approx 4.55$ auftritt.

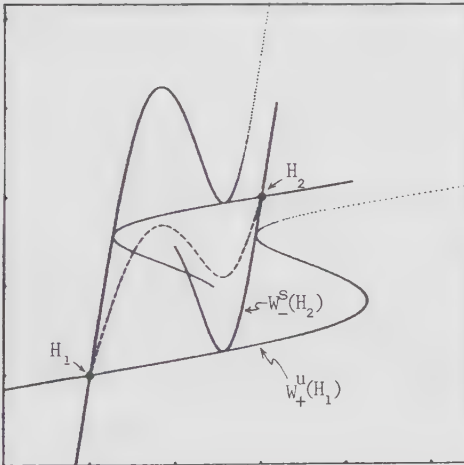


Bild 2-6

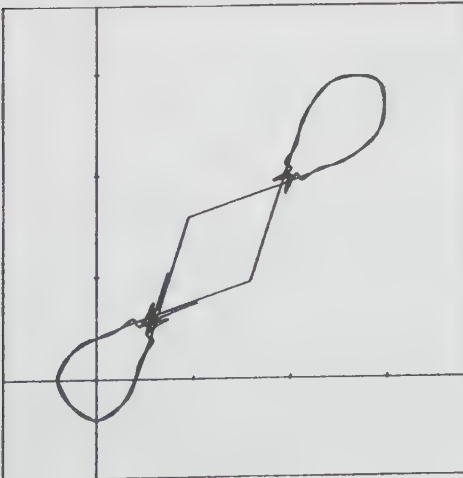


Bild 2-7

Man beachte noch, daß die Transversalität der heteroklinischen Punkte nicht nur eine technische Bedingung ist. Insbesondere haben wir im Fall der Übereinstimmung von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit (d.h. wenn $W_+^u(H_1) = W_-^s(H_2)$ ist) die Situation, daß die Strecke $\overline{H_1 H_2}$ wirklich eingeschlossen ist. X^n kann diese Strecke dann natürlich nicht schneiden. Wir haben diesen Fall in Abbildung 2-7 dargestellt. Dabei haben wir einmal eine glatte Abbildung mit einer PL-Abbildung kombiniert. Dieses ist aber in keiner Weise wesentlich und hat nur den Grund, daß das Beispiel leicht zu berechnen ist.

2.2 Sekundärverzweigung asymmetrischer Lösungen,

Geister- Typ III

Wir widmen uns nun dem besonders interessanten Phänomen der Verzweigung von Geisterlösungen aus "richtigen" Lösungen. Während wir aber in den folgenden Abschnitten (bei der Diskussion eines PL-Modells) die technischen Details recht genau darstellen, wollen wir in diesem Abschnitt etwas weniger präzise vorgehen und mehr das Prinzip unserer Überlegungen diskutieren. Um zu sehen, daß unsere Argumentation auch für die im Anhang A vorgestellten Beispiele gültig ist, halten wir die Voraussetzungen zunächst recht allgemein.

Sei also $T_\mu : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U$, $\mu \in [a, b]$ eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen (bzw. PL-Homöomorphismen) im Sinne von Satz 1-3 (und der entsprechenden Bemerkung für PL-Abbildungen, Seite 36). Wir nehmen an, daß sich T_μ als Produkt zweier Involutionen $S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und $R_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ G(x, y) \end{pmatrix}$ (wie in Abschnitt 1.1 und in den Beispielen des Anhangs) schreiben läßt, also $T_\mu = S \circ R_\mu$. Für $\mu \in [a, b]$ sei H_μ eine Familie

hyperbolischer Fixpunkte. Wir haben gesehen, daß durch

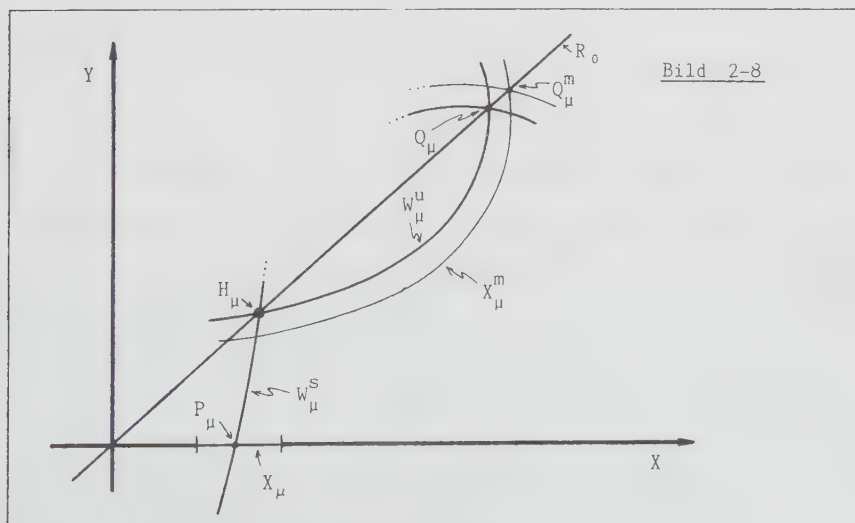
$$L_S := T^{-m}(Y) \cap T^m(X) = S T^m(X) \cap T^m(X)$$

die Lösungen der zugehörigen Randwertaufgabe charakterisiert sind (X und Y entsprachen den Randbedingungen). Symmetrische Lösungen haben wir durch

$$S_S := R_0 \cap T^m(X) \subset L_S$$

charakterisiert. Die Verzweigung asymmetrischer Lösungen der Randwertaufgabe kann also durch die Verzweigung eines Schnittpunktes $Q \in S_S$ in $Q_1 \in S_S$, $Q_2 \in L_S (\notin S_S)$ und $Q_3 = S(Q_2)$ beschrieben werden. Es ist unser Ziel diese Verzweigung zu beweisen (Für $L_R := T^{-m-1}(Y) \cap T^m(X) = R T^m(X) \cap T^m(X)$ und $S_R := R_1 \cap T^m(X)$ ist alles analog; wir betrachten den Fall daher nicht weiter).

Wir nehmen nun an, daß die stabile Mannigfaltigkeit $W_\mu^S(H_\mu)$ die Menge $X (= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 0 \})$ in einem Punkt P_μ transversal schneidet (Wir werden im folgenden mehrere Schnitte als transversal voraussetzen; im Falle von PL-Abbildung reicht es dabei jeweils anzunehmen, daß der



Index des Schnittes ± 1 ist). Sei $X_\mu \subset X$ eine Umgebung des Punktes P_μ (vgl. Abbildung 2-8) und $x_\mu : \bar{B} \rightarrow \bar{X}_\mu$ ($B := \{x \mid \|x\| < 1\}$) eine Parametrisierung von X_μ . $x_\mu^m = T^m \circ x_\mu$ parametrisiert dann $T^m(X_\mu)$.

Nun sei $Q_\mu^m \in T^m(X_\mu) \cap R_0$ für alle μ ein lokal eindeutiger Schnittpunkt (Wir schließen damit aus, daß aus Q_μ^m Schnittpunkte in L_S verzweigen). Folgen wir nun unserem Satz 1-8, so müssen wir lediglich zeigen, daß es Parameter $\mu_0, \mu_1 \in (a, b)$ gibt, für die

$$I(x_{\mu_0}^m, Sx_{\mu_0}^m, Q_{\mu_0}^m) \neq I(x_{\mu_1}^m, Sx_{\mu_1}^m, Q_{\mu_1}^m)$$

gilt. In diesem Fall erhalten wir eine

Globale Sekundärverzweigung asymmetrischer Geister (2.5).

Zwischen μ_0 und μ_1 verzweigt aus Q_μ^m (symmetrische Lösung) ein Kontinuum von Schnittpunkten in L_S , die nicht in S_S enthalten sind (die also asymmetrische Geisterlösungen der Randwertaufgabe charakterisieren). Das Kontinuum kehrt (entsprechend der Alternative von Satz 1-8) zu symmetrischen Lösungen zurück oder geht "gegen unendlich".

Es bleibt das Problem, einen solchen Indexwechsel zu zeigen. Hierzu wollen wir die Verzweigung homoklinischer Punkte ausnutzen.

Die instabile Mannigfaltigkeit $W_\mu^u(H_\mu)$ schneide R_0 in einem Punkt Q_μ . Dieses ist ein homoklinischer Punkt. Sei $w_\mu : \bar{B} \rightarrow U$ eine Parametrisierung der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit W_{loc}^u (bzw. einer iterierten $T^k(W_{loc}^u)$ für festes $k \in \mathbb{N}$), so daß $Q_\mu \in w_\mu(B) \cap R_0$ ist (Wir setzen wiederum voraus, daß dieser Schnitt lokal eindeutig ist). Wir nehmen nun an, daß es $\mu_0, \mu_1 \in (a, b)$ gibt, für die Q_μ ein transversal homoklinischer Punkt ist und

$$I(w_{\mu_0}, Sw_{\mu_0}, Q_{\mu_0}) \neq I(w_{\mu_1}, Sw_{\mu_1}, Q_{\mu_1})$$

gilt. Zwischen μ_0 und μ_1 findet also eine homoklinische Verzweigung statt. Darüber hinaus gilt die

F o l g e r u n g : homoklinische Verzweigung und Geister (2.6).

Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq m_0$ ein Schnittpunkt $Q_\mu^m \in R_0 \cap T^m(X_\mu)$ existiert, der zwischen μ_0 und μ_1 im Sinne von (2.5) eine globale Sekundärverzweigung erfährt.

Diese Aussage ergibt sich aus unserem Lemma 1-9 (incl. Bemerkungen). Vom Indexwechsel des homoklinischen Punktes können wir nämlich hiermit auf einen Indexwechsel des Punktes Q_μ^m schließen. Dazu argumentieren wir folgendermaßen.

Der Schnittpunkt Q_{μ_0} von w_{μ_0} und Sw_{μ_0} ist transversal. Es gibt also eine Umgebung A von Q_{μ_0} und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß sich Sw_{μ_0} und $x_{\mu_0}^k$ in genau einem Punkt $Z^k \in A$ schneiden (Wir nehmen dazu an, daß x_μ^k nicht einfach $T^k x_\mu$ bezeichne, sondern die (1.3) entsprechende Einschränkung hiervon). Es gilt dann

$$I(w_{\mu_0}, Sw_{\mu_0}, Q_{\mu_0}) = I(x_{\mu_0}^k, Sw_{\mu_0}, Z^k).$$

Entsprechend erhalten wir für $m \geq m_0 \in \mathbb{N}$

$$I(w_{\mu_0}, Sx_{\mu_0}^k, S(Z^k)) = I(x_{\mu_0}^m, Sx_{\mu_0}^k, Q_m^k)$$

(Q_m^k Schnittpunkt von $x_{\mu_0}^m$ und $Sx_{\mu_0}^k$). Aus den Eigenschaften unserer Schnittzahl folgt aber

$$I(x_{\mu_0}^k, Sw_{\mu_0}, Z^k) = I(w_{\mu_0}, Sx_{\mu_0}^k, S(Z^k)).$$

Für $m \geq k_0$, $m \geq m_0$ gilt also

$$I(w_{\mu_0}, Sw_{\mu_0}, Q_{\mu_0}) = I(x_{\mu_0}^m, Sx_{\mu_0}^m, Q_{\mu_0}^m).$$

Da für μ_1 alles analog gilt, ist der Indexwechsel und damit die Verzweigung aus Q_μ^m gezeigt.

Das von uns im folgenden diskutierte PL-Modell ermöglicht uns die homoklinische Verzweigung zu berechnen und somit die Verzweigung jener Schnittpunkte, die Geisterlösungen charakterisieren, zu beweisen. Wir können in dem Fall außerdem einige a priori Abschätzungen durchführen und so das globale Verhalten der Verzweigung beschreiben.

2.3 Ein PL - Modell und seine homoklinische Struktur

Wir wollen nun das Problem der Geisterlösungen für ein PL-Modell diskutieren. Zunächst stellen wir das Modell vor und berechnen die invarianten Mannigfaltigkeiten.

Sei also

$$T_{\mu} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - \mu f(x) - y \\ x \end{pmatrix}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} (s_1 - e_1)/e_1 x & | \quad x < e_1 \\ s_1 - x & | \quad e_1 \leq x \leq s_1 + e_2 \\ \frac{e_2}{s_2 - (s_1 + e_2)} (x - s_2) & | \quad s_1 + e_2 < x \end{cases} \quad (2.7)$$

wobei $0 < e_1 < s_1 < s_1 + e_2 < s_2$ ist.

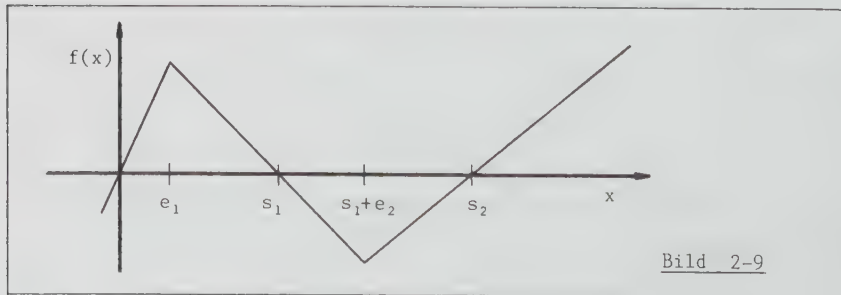


Bild 2-9

Wir bemerken, daß $f \in N(e_1, s_1)$ (1.2) und $f \in V_2^0$ (2.4) gilt. Es ist

$H = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$ ein hyperbolischer Fixpunkt von T_μ , die Linearisierung in H ist durch

$$DT|_H = \begin{pmatrix} 2+\mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und

$$\lambda = \frac{\mu+2 + \sqrt{\mu^2 + 4\mu}}{2} \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{\lambda}$$

sind Eigenwerte. Hierzu haben wir $\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ als Eigenvektoren.

Ist e_1 hinreichend klein, so schneidet $W_-^S(H)$ die x -Achse in einem Punkt P_x mit $x(P_x) = s_1(1 - \frac{1}{\lambda})$ transversal. In diesem Abschnitt wollen wir $W_+^S(H)$ und $W_+^U(H)$ genauer untersuchen.

Zunächst bemerken wir, daß T_μ entsprechend der Definition von f in drei Linearitätsbereiche zerfällt:

$$\begin{aligned} N &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \leq e_1 \right\}, \\ H &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid e_1 \leq x \leq s_1 + e_2 \right\}, \\ E &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid s_1 + e_2 \leq x \right\}. \end{aligned}$$

In jedem dieser Gebiete liegt genau ein Fixpunkt von T_μ , nämlich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\in N \quad (\text{elliptisch}), \\ H &\in H \quad (\text{hyperbolisch}), \\ E = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2 \end{pmatrix} &\in E \quad (\text{elliptisch}). \end{aligned}$$

Die Gebiete H und E werden durch die Gerade

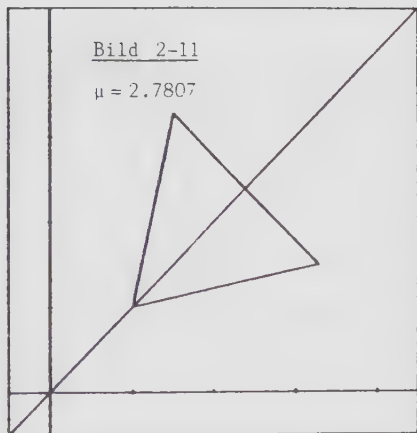
$$G := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = s_1 + e_2 \right\}$$

getrennt. W_+^U schneidet G transversal. Den Schnittpunkt wollen wir mit P_0 bezeichnen. Da H und P_0 in H liegen, ist die lokale instabile Mannigfaltigkeit in W_+^U durch

$$W_0 := \overline{HP_0} \subset W_+^U$$

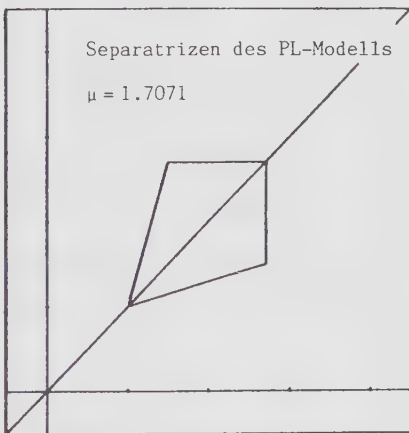
Bild 2-11

$\mu = 2.7807$

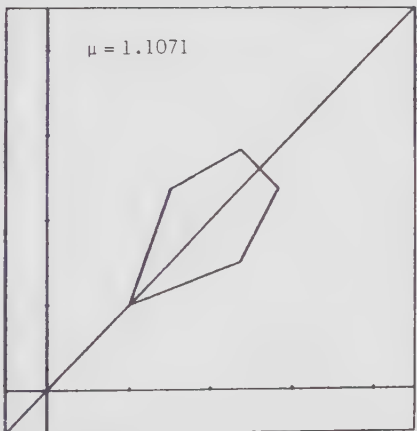


Separatrizen des PL-Modells

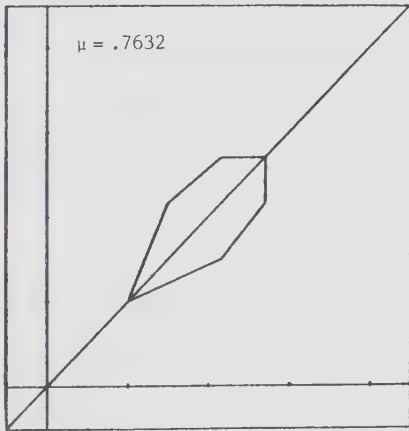
$\mu = 1.7071$



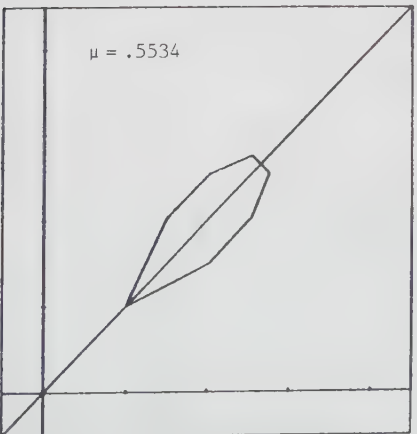
$\mu = 1.1071$



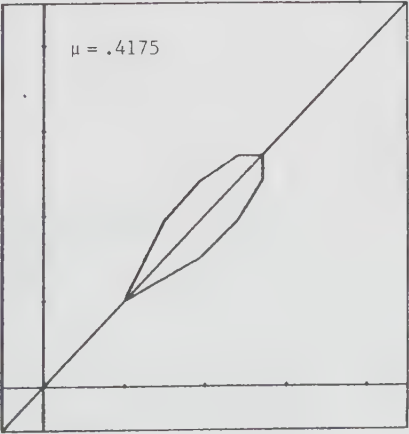
$\mu = .7632$



$\mu = .5534$



$\mu = .4175$



Offenbar ist die PL-Struktur von W_+^u zunächst durch die Abschnitte V_i gegeben. D.h., liegen alle V_i für $i < n$ in E , so ist $V_i = \overline{P_{i-1} P_i}$ für $i = 1, n$. Erst für $i > n$ wird die Struktur von W_i komplexer, hierfür brauchen wir uns aber nicht mehr zu interessieren.

Das Verhalten der homoklinischen Punkte auf W_+^u können wir (einschließlich der homoklinischen Verzweigung) umfassend beschreiben.

Es gilt der folgende Satz.

Satz 2-3 (homoklinische Struktur des Modells)

Es gibt eine eindeutig bestimmte Folge

$$\bar{\mu}_3 > \bar{\mu}_4 > \bar{\mu}_5 > \dots > 0,$$

für die folgende Aussagen gelten:

(a) Es ist $W_+^u = W_+^s$ genau dann, wenn $\mu = \bar{\mu}_i$ für ein $i \geq 3$ gilt.

(b) Für alle $i \geq 3$ folgt aus $\mu = \bar{\mu}_i$, daß $W_+ := W_+^u = W_+^s$ ein i -Eck bildet.

(c) Für alle $\mu > 0$ gibt es ein $n_\mu \in \mathbb{N}$, sodaß zwar

$$W_{n_\mu} \cap R_0 - \{H\} \neq \emptyset \text{ aber für } k < n_\mu \quad W_k \cap R_0 = \{H\} \text{ gilt.}$$

Ist $i \geq 3$ und $\mu \neq \bar{\mu}_i$, so gilt

$$(V_{n_\mu} \cup V_{n_\mu-1}) \cap R (V_{n_\mu} \cup V_{n_\mu-1}) \subset R_0 \cup R_1 \cup R_2.$$

(d) Sei $Q_k \in W_{n_\mu} \cap R_k$ für $k \geq 0$. W_+^u schneidet R_k für alle $k \geq 0$ in Q_k mit Index ± 1 . Ist $\mu \neq \bar{\mu}_i$ für alle $i \geq 3$, so ist der Schnitt transversal und ferner schneiden sich W_+^u und W_+^s in Q_k transversal.

(e) Für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-1})$ und $n \geq 2$ gilt (mit $m \geq n_\mu$)

$$I(w_m, Row_m, Q_0) = +1.$$

Ist $\mu \in (\bar{\mu}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n})$ und $n \geq 1$ (sei $\bar{\mu}_2 := \infty$), so gilt

$$I(w_m, Row_m, Q_0) = -1.$$

Für alle $\mu \neq \bar{\mu}_k$, $k \geq 3$, ist

$$I(w_m, Row_m, Q_0) = -I(w_m, Row_m, Q_1).$$

Am prägnantesten können wir die Aussage (e) wohl so formulieren:
die homoklinische Verzweigung bewirkt in den Verzweigungspunkten einen Indexaustausch zwischen den homoklinischen Punkten Q_0 und Q_1 .
Man beachte, daß (wie sich im Beweis von (e) noch herausstellt)

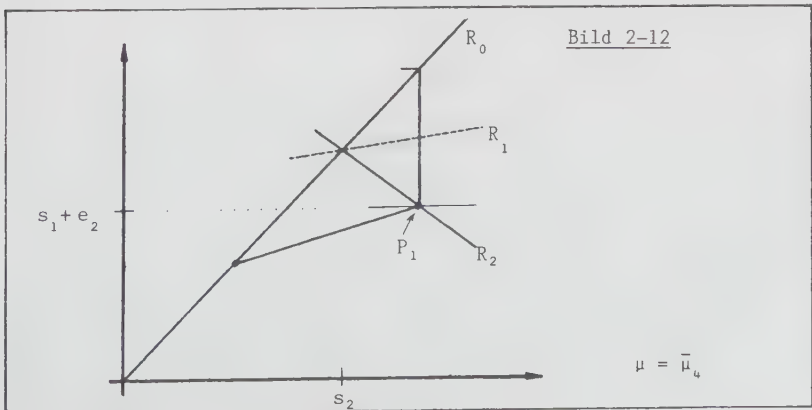
$$I(w_m, Row_m, Q_i) = I(w_m, Sow_m, Q_i)$$

gilt.

Bevor wir nun die einzelnen Aussagen beweisen, wollen wir die Folge der $\bar{\mu}_k$ charakterisieren. Wir definieren:

F o l g e (2.8)

Mit $\bar{\mu}_k$ bezeichnen wir das kleinste $\mu > 0$, für das $P_1 \in R_{k-2}$ gilt.



Lemma 2-4 (Folge der $\bar{\mu}_k$)

(a) Für alle $k \geq 3$ gibt es ein $\mu > 0$, sodaß $P_1 \in R_{k-2}$ gilt.

(b) Die Elemente der Folge (2.8) sind durch

$$\bar{\mu}_3 > \bar{\mu}_4 > \bar{\mu}_5 \dots > 0$$

geordnet.

(c) Ist $\mu = \bar{\mu}_k$, so gilt für $2i < k$

$$x(P_i) > y(P_i).$$

(d) Ist $P_1 \in R_{k-2}$ für $\mu = \mu_0$ und gilt für $2i < k$, daß

$$x(P_i) > y(P_i) \text{ ist, so haben wir für alle } \mu_0 > \mu > 0,$$

daß $P_1 \notin R_{k-2}$ ist.

Wir gehen nun folgendermaßen vor. Zunächst setzen wir das Lemma 2-4 voraus und beweisen unseren Satz 2-3. Dann zeigen wir, wie die Mengen R_i unter der Änderung von μ lokal um E "gedreht" werden und beweisen damit das zunächst vorausgesetzte Lemma.

Beweis von Satz 2-3:

Sei $2i_0 = k \geq 3$. Für $\mu = \bar{\mu}_k$ gilt $P_{i_0} \in R_0$. Da $T = S \circ R$ ist, gilt

$P_{i_0-1} = R(P_{i_0})$, also $V_{i_0} = R(V_{i_0})$, denn wegen Lemma 2-4 (c) ist

$$V_{i_0} = \overline{P_{i_0-1}P_{i_0}}. \text{ Damit gilt}$$

$$T^j(V_{i_0}) = RT^{-j}(V_{i_0}) \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}$$

und somit $W_+^u = W_+^s$. Die Mannigfaltigkeiten bilden ein k -Eck, da

W_i in den Punkten P_1 bis P_{i_0-1} "Knickstellen" hat.

Für $2i_0 + 1 = k$ schließen wir analog.

Sei nun für $\mu = \mu_*$ $W = W_+^u = W_+^s$. Da $W_+^s = S(W_+^u)$ ist, gibt es ein

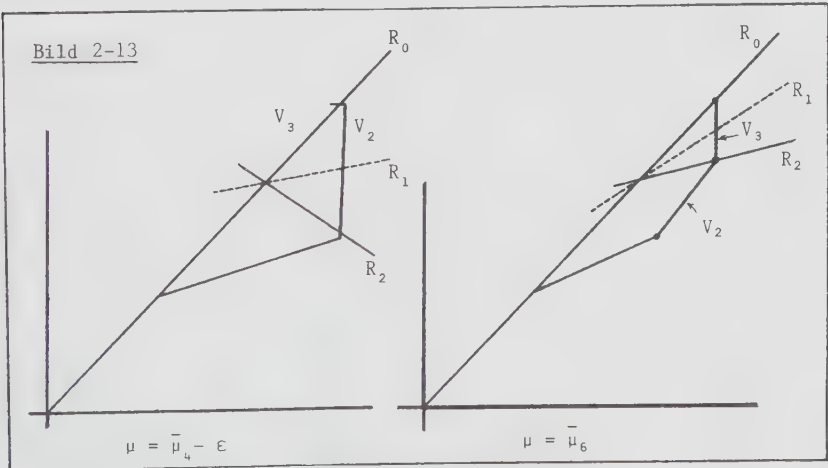
k , sodaß für $j \geq k$ gilt

$$V_j \subset S(W_1) \text{ aber } V_{k-1} \notin S(W_1).$$

Dann aber muß $V_k = S(V_1)$ sein. Wir nehmen an, daß $k = 2i_0$ ist (für $k = 2i_0 + 1$ ist wiederum alles analog). Wir haben dann $V_{i_0} = S(V_{i_0+1})$, also $P_{i_0} \in R_0$. Für die Punkte $P \in W_{i_0} - \{P_{i_0}\}$ muß $x(P) > y(P)$ gelten, da wir sonst noch einen weiteren Schnitt von W_{i_0} und $S(W_{i_0})$ hätten, was aber nicht möglich ist, denn W_+^S kann sich nicht selbst schneiden.

Es gilt $P_1 \in R_{k-2}$. Mit Lemma 2-4 d) folgt also, daß $\mu_* = \bar{\mu}_k$ ist. Damit haben wir die Punkte a) und b) bewiesen.

Um c) zu zeigen, betrachten wir $\mu \in [\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-2})$ mit $n > 2$. Für $i < n$ gilt $x(P_i) > y(P_i)$, da erst in $\bar{\mu}_{2n-2}$ $P_{n-1} \in R_0$ wird. Andererseits gilt $x(P_n) \leq y(P_n)$. Also ist das gesuchte $W_{n\mu}$ gerade W_n und R_0 wird nur von V_n geschnitten.



$V_n \cap R(V_{n-1})$ enthält einen Punkt $Q_0 \in R_0$, da $R(V_{n-1}) = S(V_n)$ ist. Wir nehmen an, daß V_n und $S(V_n)$ in Q_0 nicht transversal sind. Ist $\mu \neq \bar{\mu}_{2n}$, dann muß $V_n \cap S(V_n)$ auf einer (unter S invarianten) Geraden liegen. P_{n-1} und $S(P_n)$ liegen auf dieser Geraden. Da aber $S(P_n) = R(P_{n-1})$ ist und die Involution R die x -Koordinate fest

läßt, ist $x(S(P_n)) = x(P_{n-1})$. Dann aber ist $S(P_n) = P_{n-1}$ und somit $\mu = \bar{\mu}_{2n-1}$.

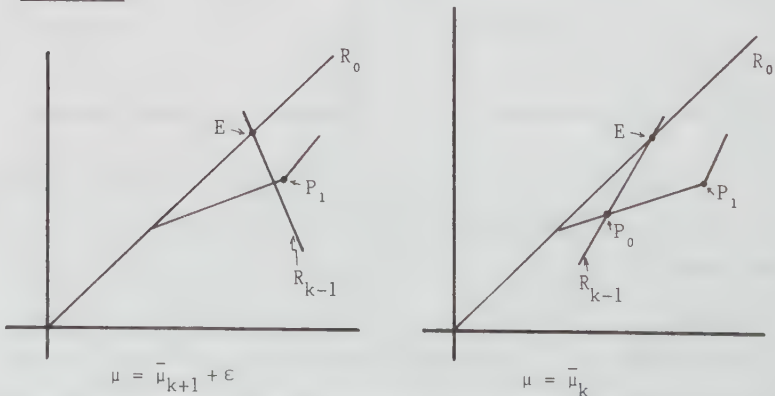
Für $\mu \neq \bar{\mu}_k$ ist also V_n transversal zu $R(V_{n-1})$ und Q_0 das einzige Element des Schnittes. Der Schnitt $V_{n-1} \cap R(V_n)$ ergibt sich direkt als Urbild unter der Abbildung T . Es ist $Q_2 = T^{-1}(Q_0) \in R_2$.

Schließlich enthält $V_n \cup V_{n-1}$ einen Punkt $Q_1 \in R_1$. Dann aber ist $Q_1 \in V_n \cap R(V_n)$ oder aber $Q_1 \in V_{n-1} \cap R(V_{n-1})$. Wir betrachten nur den ersten Fall (das Übrige folgt analog). Wieder nehmen wir an, daß der Schnitt nicht transversal ist und ferner $\mu \neq \bar{\mu}_{2n-1}$ gilt. Dann liegt $V_n \cap R(V_n)$ auf einer Geraden und es muß $x(P_n) = x(P_{n-1})$ gelten. Aus $S(P_n) = R(P_{n-1})$ folgt dann aber, daß $P_n \in R_0$ ist. Damit muß $\mu = \bar{\mu}_{2n}$ sein. Also ist $Q_1 \in R_1$ für $\mu \neq \bar{\mu}_k$ ein transversaler Schnittpunkt und damit einziges Element des Schnittes.

Die Betrachtung von $\mu \in [\bar{\mu}_4, \infty)$ benötigt keine anderen Überlegungen und verläuft analog. Damit ist also Punkt (c) bewiesen, aber auch schon der zweite Teil von (d).

Um (d) vollständig zu zeigen, betrachten wir $\mu \in (\bar{\mu}_{k+1}, \bar{\mu}_k]$ für $k \geq 3$.

Bild 2-14



R_{k-1} schneidet W_1 . Der Schnitt ist transversal, da wegen Lemma 2-4 c) R_{k-1} zwischen E und dem Schnittpunkt einfach durch eine Gerade gegeben ist. Da die Betrachtung von $\mu \in (\bar{\mu}_3, \infty)$ wiederum analog verläuft, ist damit Punkt (d) bewiesen.

Den Beweis von (e) erleichtert nun unser Wissen, daß Q_0 und Q_1 für $\mu \neq \bar{\mu}_k$ transversale Schnitte von W_m und $R(W_m)$ sind. Wir brauchen also nur die Jacobi-Matrizen

$$\left(\frac{d w_m}{d t} \quad - D R|_{W_m} \cdot \frac{d w_m}{d t} \right)$$

zu Q_0 und Q_1 anzusehen. Sie sind für $\mu \neq \bar{\mu}_k$ regulär. Der Index von Q_0 und Q_1 ist im Intervall $(\bar{\mu}_k, \bar{\mu}_{k-1})$ also konstant. Nach den bisherigen Überlegungen können wir die Punkte Q_0 und Q_1 genau lokalisieren.

Es gilt für $\mu = \bar{\mu}_{2n} - \varepsilon$

$$Q_0 \in V_{n+1} \cap R(V_n), \quad Q_1 \in V_n \cap R(V_n),$$

für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-1})$

$$Q_0 \in V_n \cap R(V_{n-1}), \quad Q_1 \in V_n \cap R(V_n),$$

und für $\mu = \bar{\mu}_{2n-1} + \varepsilon$

$$Q_0 \in V_n \cap R(V_{n-1}), \quad Q_1 \in V_{n-1} \cap R(V_{n-1}).$$

Die zum Schnitt $V_i \cap R(V_j)$ gehörende Jacobi-Matrix wollen wir mit $J_{i,j}$ bezeichnen.

Zunächst bemerken wir, daß für alle V_k gilt,

$$\frac{d w_m}{d t} \text{ ist auf } w_m^{-1}(V_k) \text{ konstant.}$$

Für jedes dieser V_k gilt außerdem

$$\frac{d w_{m+1}}{d t} = \lambda \frac{d w_m}{d t}.$$

Im folgenden werden wir $R(V_k) = S(V_{k+1})$ ausnutzen. Für die Parametri-

sierungen gilt $R w_m(t_1) = S w_{m+1}(t_1) = S w_m(t_2)$ also

$$\frac{d R w_m}{d t} = \lambda \frac{d S w_m}{d t} .$$

Da λ bzw. $\frac{1}{\lambda}$ positiv ist, hat dieser Faktor für $\text{sign det } J_{i,j}$ keine Bedeutung. Wir multiplizieren daher im folgenden an den entsprechenden Stellen immer mit $\alpha > 0$.

Für die Ableitung zu V_n schreiben wir nun

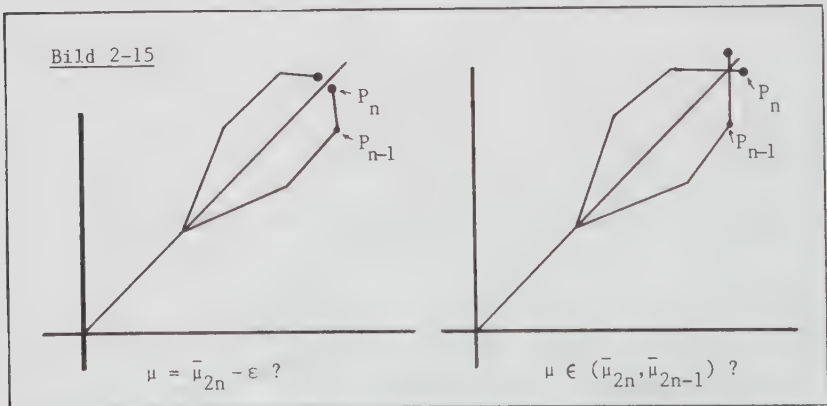
$$\frac{d w_m}{d t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

In $\mu = \bar{\mu}_{2n}$ ist $a = 0$ und $b > 0$. Für $\mu = \bar{\mu}_{2n} - \epsilon$ ist $a > 0$.

Wäre $a \leq 0$, so wäre $x(P_n) \leq x(P_{n-1})$. Da aber $x(P_n) > y(P_n)$ ist, führt $S(P_n) = R(P_{n-1})$ zu

$$x(P_n) \leq x(R(P_{n-1})) = x(S(P_n)) = y(P_n) < x(P_n) .$$

Widerspruch!



Genau so zeigt man, daß für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-1})$ $a < 0$ gilt. Man beachte dabei, daß $b > 0$ ist. Um $b = 0$ zu erreichen, muß es zunächst ein μ mit $b = -a$ geben. Dann aber wäre $\mu = \bar{\mu}_{2n-1}$. Für dieses Intervall

ist also insbesondere $b > -a$. Daß für $\mu = \bar{\mu}_{2n-1} + \varepsilon$ $b < -a$ ist, folgt z.B. aus der Tatsache, daß $b = 0$ für $\mu = \bar{\mu}_{2n-2}$ gelten muß.

Da $R(V_{n-1}) = S(V_n)$ und $Rw_m = Sw_{m+1}$ ist, gilt

$$\alpha \cdot \det J_{n,n-1} = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = (b^2 - a^2).$$

Der Index von Q_0 ist also $+1$ für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-1})$ und -1 für $\mu = \bar{\mu}_{2n-1} + \varepsilon$.

R_1 wird durch die Gleichung $y = \frac{2x - \mu f(x)}{2}$ beschrieben. Wir setzen $r(x) = 2 - \mu f'(x)$ (sofern $f'(x)$ definiert ist). Es ist dieses das Doppelte der Steigung von R_1 . Man rechnet leicht nach, daß

$$DR|_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & -1 \end{pmatrix}$$

gilt. Für $R(V_n)$ haben wir also

$$DR \cdot \frac{dw_m}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ -b + r \cdot a \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $\bar{b} := -b + r \cdot a$.

Da $V_{n+1} = S \circ R(V_n)$ ist, haben wir hier

$$\alpha \cdot \frac{dw_m}{dt} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ a \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\alpha \cdot \det J_{n+1,n} = \det \begin{pmatrix} \bar{b} & -a \\ a & -\bar{b} \end{pmatrix} = (a^2 - \bar{b}^2).$$

Nun ist für $\mu = \bar{\mu}_{2n}$ $a = 0$, also $b = -\bar{b} > 0$. Für $\mu = \bar{\mu}_{2n} - \varepsilon$ ist der Index von Q_0 also -1 . Damit ist der erste Teil der Aussage (e) bewiesen. In $\mu = \bar{\mu}_{2n}$ ist $b - \bar{b} = 2b > 0$, also ist

$$\det J_{n,n} = \det \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -\bar{b} \end{pmatrix} = a(b - \bar{b})$$

für $\mu = \bar{\mu}_{2n} - \varepsilon$ positiv und für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-1})$ negativ. Der Index von Q_1 ist hier also genau das Negative des Index von Q_0 .

$DR \cdot \frac{dw_m}{dt}$ haben wir für $R(V_{n-1})$ bereits zu $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ berechnet.

Für $V_{n-1} = R \circ R(V_{n-1})$ gilt also

$$\alpha \cdot \frac{d w_m}{d t} = \begin{pmatrix} b \\ -a + r \cdot b \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $\bar{a} := -a + r \cdot b$. Damit ist

$$\alpha \cdot \det J_{n-1, n-1} = \det \begin{pmatrix} b & -b \\ \bar{a} & -a \end{pmatrix} = b(\bar{a} - a).$$

Für $\mu = \bar{\mu}_{2n-1}$ ist $V_{n-1} = R(V_n)$, also $\begin{pmatrix} b \\ \bar{a} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und

$\bar{b} = -b + r \cdot a = -b(r+1)$. Dann ist $\bar{a} - a = b(r+1) + b$ also

$$\det J_{n-1, n-1} = b^2(r+2).$$

Für $\mu \geq \bar{\mu}_3$ ist die Steigung von R_1 aber größer als -1 , also ist $r > -2$. Damit aber ist der Index von Q_1 für $\mu = \bar{\mu}_{2n-1} + \varepsilon$ gleich $+1$ und unser Satz bewiesen. §

Wir wollen uns nun ansehen, wie die Mengen R_i in E um den Fixpunkt E bei Änderung des Parameters μ "gedreht" werden. Dabei wollen wir uns auf das folgende Lemma stützen. Sei dazu

$$J_r = \begin{pmatrix} r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir (mit $r = 2 - \mu'$) die Jacobi-Matrix von T im Sinn haben. Sei $Q_r^0 \in \mathbb{R}^2$ ein (von r differenzierbar abhängiger) Punkt (bzw. Tangentialvektor). Wir setzen $Q_r^n := J_r^n \cdot Q_r^0$ für $n \geq 1$.

L e m m a 2-5 ("Drehungserhaltung")

Ist $\det \left(Q_r^0 \quad \frac{d}{dr} Q_r^0 \right) \leq 0$, dann ist auch

$\det \left(Q_r^n \quad \frac{d}{dr} Q_r^n \right) < 0$.

Beweis:

Wir definieren

$$r_{-1} = 0, \quad r_0 = 1, \quad r_j = r \cdot r_{j-1} - r_{j-2} \quad \text{für } j > 0$$

und erhalten

$$J_r^n = \begin{pmatrix} r_n & -r_{n-1} \\ r_{n-1} & -r_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Mit $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} := J_r^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ haben wir also $y_n = x_{n-1}$. Wir wollen

r variieren. Sei dazu

$$\bar{T} \begin{pmatrix} r \\ x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Kettenregel ergibt

$$D \bar{T}^n = D \bar{T}|_{T^{n-1}} \cdot D \bar{T}^{n-1} = \prod_{j=1}^n D \bar{T}|_{T^{n-j}}.$$

Damit folgt aus

$$D \bar{T}|_{T^{n-j}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_{n-j} & r & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

daß gilt

$$D \bar{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_n & J^n \\ \beta_n & \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\alpha_1 = x_{n-1}$, $\beta_1 = 0$ und

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + r_{i-1} \cdot x_{n-i}, \quad \beta_i = \beta_{i-1} + r_{i-2} \cdot x_{n-i},$$

also

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^n r_{j-1} \cdot x_{n-j} \quad \text{und} \quad \beta_n = \sum_{j=1}^n r_{j-2} \cdot x_{n-j}.$$

Sei nun $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{d}{dr} Q_r^0$, dann ist

$$D \bar{T}^n \begin{pmatrix} r \\ Q_r^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha_n) \\ (\beta_n) \end{pmatrix} + J^n \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det \begin{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} + J^n \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{pmatrix} > 0$$

zu zeigen. Da aber

$$\det \begin{pmatrix} J^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{pmatrix} \leq 0$$

brauchen wir nur noch

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} r_{i-1} & x_n \\ r_{i-2} & y_n \end{pmatrix} &= \det \left(J^{i-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + J^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + J^{n-i+1} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) \\ &= x_{n-i} \end{aligned}$$

festzustellen, um mit

$$-(x_{n-1} \alpha_n - x_n \beta_n) = - \sum_{j=1}^n (r_{j-1} x_{n-1} - r_{j-2} x_n) x_{n-j} = - \sum_{j=1}^n x_j^2 < 0$$

den Beweis zu vollenden. \$

Wir wollen nun Winkel betrachten. Zwei Winkel $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ nennen wir äquivalent, falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodaß $\phi_1 - \phi_2 = k \cdot 2\pi$ ist. Sei $C := [0, 2\pi)$. Dann definieren wir $q: \mathbb{R} \rightarrow C$ als die Abbildung, die einem Winkel ϕ den in C liegenden äquivalenten Winkel ϕ^0 zuordnet. Sei $\|P\|$ die euklidische Norm eines Punktes $P \in \mathbb{R}^2$. Die Polarkoordinatendarstellung $(\phi^0(P), \|P\|)$ ist mit $\phi^0: \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ eindeutig. ϕ^0 ist also die Abbildung, die einem Punkt den in C liegenden Winkel zuordnet.

Ist P_t , $t \in \mathbb{R}$, eine Familie von Punkten, so gibt es eine stetige Abbildung $\phi_{P_t}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für die gilt

$$q \circ \phi_{P_t}(t) = \phi^0(P_t).$$

Unser Lemma 2-5 können wir nun über die Veränderung von Winkeln interpretieren:

wächst (bzw. fällt) der Parameter r

und ist der Winkel $\Phi_{Q_r^0}(r)$ konstant oder fällt (bzw. wächst),

so fällt (bzw. wächst) der Winkel $\Phi_{Q_r^0}(r)$.

Beweis von Lemma 2-4:

Wir können R_0 in der Umgebung von E durch

$$\begin{aligned} r_0 : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow E + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kanonisch parametrisieren. Dabei ist U eine geeignete Umgebung der $0 \in \mathbb{R}$.

Für R_1 wählen wir entsprechend

$$\begin{aligned} r_1 : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow E + t \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für beliebiges $i \in \mathbb{Z}$ ist dann $r_{2i} = T^{-i} \circ r_0$ eine Parametrisierung von

$R_{2i} = T^{-i}(R_0)$ und $r_{2i+1} = T^{-i} \circ r_1$ eine Parametrisierung von

$R_{2i+1} = T^{-i}(R_1)$. Insbesondere ist also $r_{-1}(t) = E + t \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Richtung der R_1 ist also durch die Vektoren

$$r_{2i}' := J^{-i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r_{2i+1}' := J^{-i} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die Winkel der r_{-k}' wollen wir durch $\Psi_k(r) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschreiben.

Es sei $\Psi_0(r) = \Phi^0(r_0')$, dann ist $\Psi_k(r)$ als Winkel von r_{-k}' durch

$$q(\Psi_k(r)) = \Phi^0(r_{-k}') \quad \text{und} \quad \Psi_k - \Psi_{k-1} \in \mathbb{C}$$

eindeutig festgelegt.

Wir vergleichen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $J \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\det \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} J \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + y^2 - rxy .$$

Man rechnet leicht nach, daß diese Determinante für $r \leq 2$ stets größer oder gleich Null ist. Also muß $\Psi_k - \Psi_{k-1} < \pi$ gelten. Dann sind unsere Ψ_k aber von r stetig abhängig. Es gilt

$$\frac{\pi}{4} = \Psi_0(r) \leq \Psi_1(r) \leq \Psi_2(r) \leq \Psi_3(r) \dots \quad (2.9)$$

Gleichheit tritt dabei nur für $r = 2$ ein.

Wächst (bzw. fällt) nun $r \leq 2$, so fallen (bzw. wachsen) die Winkel Ψ_{2i} , $i \geq 1$. Da aber auch Ψ_1 fällt (wächst), fallen (bzw. wachsen) ebenso die Winkel Ψ_{2i+1} , $i \geq 1$.

Wir bemerken nun, daß unser Punkt P_1 für alle μ auf der Geraden

$$T(G) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = s_1 + e_2 \right\}$$

liegt. $x(P_1)$ hängt von μ ab. P_1 ist durch den von H ausgehenden Eigenvektor $\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt. Da aber λ mit μ unbeschränkt wächst, gilt,

$x(P_1)$ wächst mit μ , und zwar unbeschränkt.

Für $\mu = 0$ ist $r = 2 - \mu f' = 2$ und da $f' > 0$ in E gilt, ist $\frac{dr}{d\mu} < 0$.

Ist μ beliebig groß, so ist r beliebig klein und damit $\Psi_1(r)$ nahe bei π . Es muß also eine Folge von μ_k geben, sodaß für $\mu = \mu_k$

$\Psi_k = \frac{\pi}{2}$ gilt. Für $\mu > \mu_k$ gibt es dann einen Schnittpunkt P von R_k und $T(G)$, dessen x -Koordinate $x(P)$ mit wachsendem μ fällt.

Es gibt dann ein erstes μ , sodaß $P = P_1$ ist. Damit ist der Teil (a) des Lemmas gezeigt.

Das eben gefundene μ_k erfüllt die unser Folgeelement $\bar{\mu}_{k+2}$ charakterisierende Bedingung (2.8). Aus (2.9) folgt offenbar

$$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \mu_4 > \dots$$

Dieses überträgt sich dann aber sofort auf unsere Folge der $\bar{\mu}_k$, womit

(b) gezeigt ist. (c) schließen wir aus der Tatsache, daß für $\mu = \bar{\mu}_k$

$$\frac{5\pi}{4} < \Psi_{k-2} < \Psi_{k-1} < \dots < \Psi_0$$

gelten muß. (d) ist dann aber nur noch ein Umkehrschluß, dessen Details

wir hier fortlassen.

§

2.4 Geisterlösungen durch Transition

Wir haben in Kapitel 0 drei Typen von Geisterlösungen vorgestellt. An unserem Modell wollen wir nun die Existenz verschiedener Geister beweisen. In diesem Abschnitt werden wir den Typ II behandeln. Es zeigt sich, daß diese Geisterlösungen auf die im letzten Abschnitt diskutierten Separatrizen (für die Parameter $\bar{\mu}_3$ und $\bar{\mu}_4$) zurückgeführt werden können.

Für alle $\mu > 0$ schneidet die stabile Mannigfaltigkeit W_-^S die x -Achse $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 0 \right\}$ in einem von μ abhängigen Punkt P_μ , für den gilt: $x(P_\mu) > 0$. Sei $X^1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \mid x \geq x(P_\mu) \right\}$.

Durch den Schnitt $T^m(X) \cap R_{0(1)}$ haben wir symmetrische Lösungen der Randwertaufgabe (0.2) charakterisiert. $T^m(X^1) \cap R_{0(1)}$ liefert uns nun solche Lösungen, deren Maximumsnorm größer als s_1 ist. Wir setzen

$$X^n := T(X^{n-1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y \leq x \right\}), \quad n > 0.$$

Aus dem λ -Lemma können wir folgern (wir präzisieren dieses in Lemma 2-7), daß X^m die Mengen R_0 und R_1 eindeutig schneidet und für die Schnittpunkte $L_0^m \in X^m \cap R_0$ bzw. $L_1^m \in X^m \cap R_1$ gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L_0^m = Q_0 \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} L_1^m = Q_1.$$

In Satz 2-3 hatten wir $Q_{0(1)}$ als Schnittpunkt von $R_{0(1)}$ mit der instabilen Mannigfaltigkeit W_+^u definiert. Asymptotisch, das heißt für hinreichend große Dimension m , kann das Verhalten der hier interessierenden Lösungen also auf Q_0 und Q_1 zurückgeführt werden. Die Norm dieser Lösungen ist durch die x -Koordinate $x(L_{0(1)}^m)$ bestimmt.

Da die Geisterlösungen vom Typ II charakterisierende Normverhalten müssen wir also im Verhalten der x -Koordinate der Punkte Q_0 und Q_1 wiederfinden. Genau dieses ist aber der Fall. Das Phänomen Transition folgt somit aus der folgenden Aussage.

Satz 2-6 (lokales Maximum und Monotonie)

Seien $\bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4$ (2.8), sowie Q_0, Q_1 die in Satz 2-3 eingeführten Parameter bzw. Punkte.

Dann gilt für die Funktionen

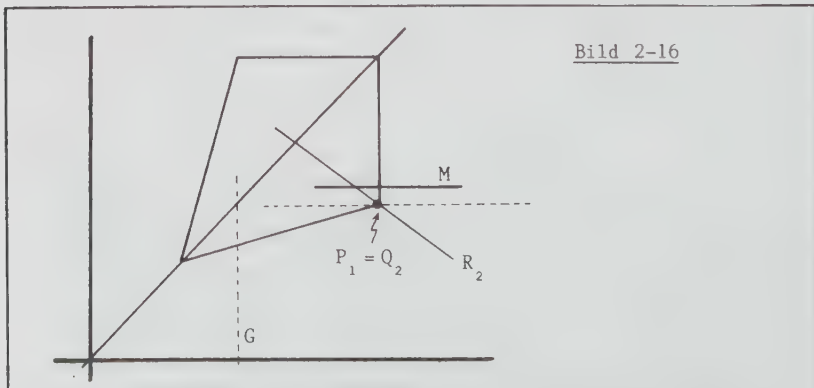
$$\begin{array}{ll} x_0 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} & \text{und} \quad x_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ \mu \rightarrow x(Q_0) & \mu \rightarrow x(Q_1) \end{array},$$

x_0 (bzw. x_1) hat in $\bar{\mu}_4$ (bzw. $\bar{\mu}_3$) ein lokales Maximum und ist für $\mu > \bar{\mu}_4$ (bzw. $\mu > \bar{\mu}_3$) monoton fallend mit

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_0(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} x_1(\mu) = s_2.$$

Beweis:

- a) Für $Q_2 \in R_2 \cap W_+^u$ gilt $x(Q_2) = x(Q_0)$. Wir können also Q_2 anstelle von Q_0 studieren.



Im interessierenden Bereich hat R_2 die Gleichung

$$y = x - \mu f'(s_2) (x - s_2)$$

und W_2 hat die Gleichung

$$y = \frac{(x - s_1)}{\lambda} + s_1.$$

Wir fassen zusammen und lösen nach x auf:

$$x \cdot (1 - \mu f' - \frac{1}{\lambda}) = (1 - \mu f' - \frac{1}{\lambda}) \cdot s_1 - \mu f' \cdot (s_2 - s_1)$$

$$x = s_1 - \frac{f' \cdot (s_2 - s_1)}{\frac{1}{\mu} - f' - \frac{1}{\lambda \mu}} = s_1 - \frac{f' \cdot (s_2 - s_1)}{-f' - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{\mu}}}.$$

x fällt demnach monoton mit wachsendem μ . Da R_2 für $\mu \geq \bar{\mu}_4$ W_2 schneidet, ist damit für Q_0 die Hälfte der Arbeit getan.

b) Für $\mu < \bar{\mu}_4$ schneidet R_2 zunächst V_2 . Wir schätzen gegen den Schnitt von V_2 mit einer zur x -Achse parallel liegenden Geraden M ab.

Sei $M := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = s_1 + \delta \}$, $\delta > e_2$ und $P \in M \cap W_+^u$.

Für $0 \leq \bar{\mu}_4 - \mu \ll 1$ gilt $x(Q_2) \leq x(P)$.

$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ wird auf $\left[(2 - \mu f'(s_2)) \cdot \lambda - 1 \right]$ abgebildet. Also schneidet V_2 die Gerade M für

$$x(P) = s_1 + e_2 \lambda + (\delta - e_2) (2 - \mu f' - \frac{1}{\lambda}).$$

Also ist

$$\frac{d x(P)}{d \mu} = e_2 \cdot \frac{d \lambda}{d \mu} + (\delta - e_2) \left(-f' - \frac{d}{d \mu} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right) > 0$$

für $\delta \approx e_2$.

x_0 hat demnach in $\bar{\mu}_4$ ein lokales Maximum.

c) Um x_1 zu untersuchen, betrachten wir zunächst den Schnitt

$W_1 \cap R_1$ für $\mu \geq \bar{\mu}_3$. R_1 ist durch

$$y = x - \frac{\mu}{2} f'(s_2) (x - s_2)$$

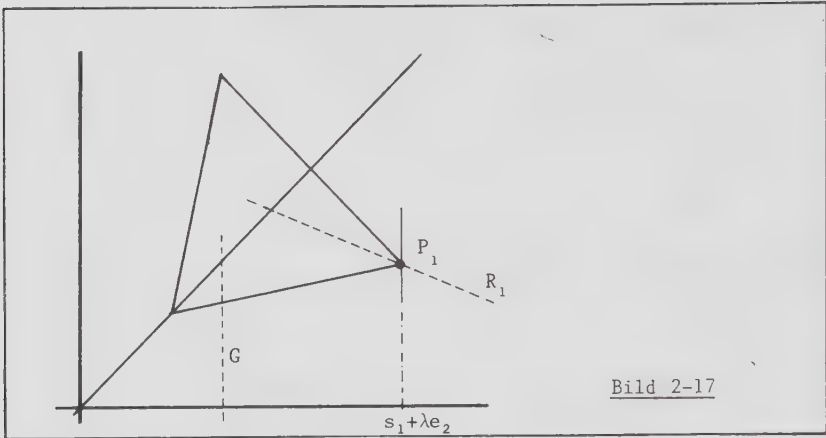


Bild 2-17

zu beschreiben. Es ist also alles wie in a).

d) Für $\mu < \bar{\mu}_3$ schneidet R_1 zunächst V_2 . Ist nun $\mu \approx \bar{\mu}_3$, so ist $x(Q_1) \leq x(P_1)$. Wir können also $x(Q_1)$ durch $\lambda \cdot e_2 + s_1$ abschätzen.

λ fällt aber monoton mit μ .

S

B e m e r k u n g

Das lokale Maximum von x_0 und x_1 hat den Wert $s_1 + \lambda e_2$ für $\mu = \bar{\mu}_4$ bzw. $\mu = \bar{\mu}_3$. Da aber $\bar{\mu}_3 > \bar{\mu}_4$ und λ von μ monoton abhängt, ist das lokale Maximum von x_1 größer als das von x_0 . Für die symmetrischen Lösungen der Randwertaufgabe (0.2) gilt also für hinreichend große Dimensionen, daß das "Geistermaximum" für ungerade Dimensionen größer als das für gerade Dimensionen ist.

2.5 Verzweigung asymmetrischer Geisterlösungen

Wir wollen nun für unser Modell die Existenz von Geisterlösungen des Typs III beweisen. Zu jedem $n \geq 2$ können wir ein $e(n) > 0$ finden, so daß für alle $\mu \geq \bar{\mu}_{2n+1}$ ($\bar{\mu}_k$ bezeichnet die Elemente der Folge (2.8)) und $0 < e_1 < e(n)$ gilt, die stabile Mannigfaltigkeit $W_-^S(H)$ schneidet die x -Achse in einem Punkt P_x mit $x(P_x) = s_1(1 - \frac{1}{\lambda}) > e_1$ transversal. Zwischen H und P_x ist $W_-^S(H)$ durch die Strecke $\overline{HP_x}$ gegeben.

Im folgenden setzen wir $e_1 < e(n)$ voraus. Wir können unsere Betrachtungen dann auf $H \cup E$ (wie in Abschnitt 2.1 definiert) beschränken und erhalten ein etwas übersichtlicheres Verzweigungsverhalten. Die Einschränkung ist nicht notwendig, um Verzweigung zu erhalten!

Wie im letzten Abschnitt sei $X^1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \mid x \geq x(P_x) \right\}$ und $X^n := T(X^{n-1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq y \right\}) \subset T^n(X)$.

Lemma 2-7 (Schnitt von X^n und R_i)

Zu beliebigem $\mu > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß sich X^n und R_0 sowie X^n und R_1 für alle $n \geq n_0$ schneiden.

Der Schnitt ist eindeutig und hat den Index ± 1 .

Wir benötigen für den Beweis und das Weitere noch einige Bezeichnungen, um die Mengen X^n genauer beschreiben zu können. Zunächst parametrisieren wir X^1 durch

$$\begin{aligned} x^1 : [x(P_x), \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

$x^i = T^{i-1} \circ x^1$ liefert eine Parametrisierung von X^i , wobei wir den Definitionsbereich von x^i natürlich geeignet wählen.

Wie in Abschnitt 2.3 definieren wir G als die Gerade, welche H und E trennt, $P_0 \in W_+^U(H) \cap G$ und $W_0 := \overline{HP_0}$ als lokale instabile Mannigfaltigkeit, ebenso P_i, W_i, V_i und die Parametrisierungen w_i von W_i . Man vergleiche noch einmal mit Abbildung 2-10 aber auch mit 2-18.

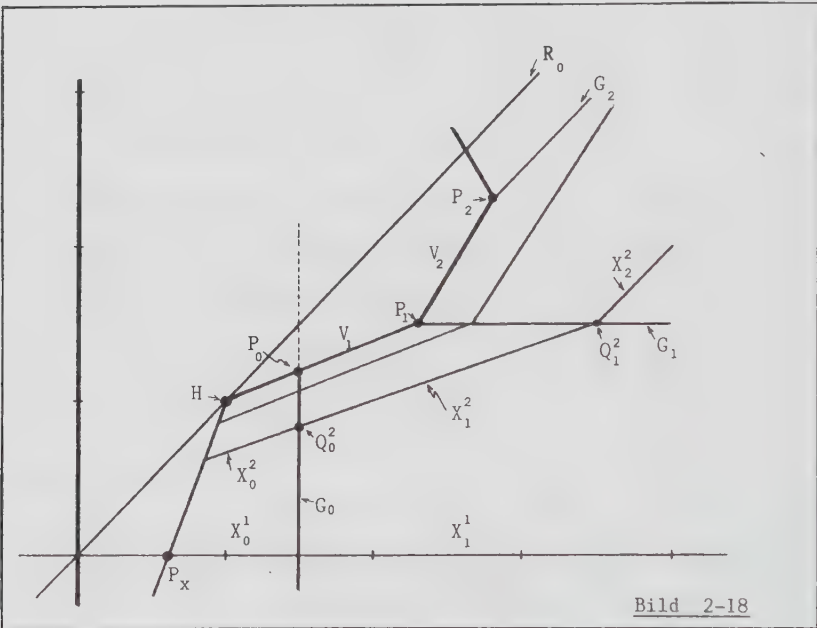


Bild 2-18

Sei $G_0 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G \mid y \leq y(P_0) \}$ sowie $G_i := T^i(G_0)$. Die Schnittpunkte von X^m und G_0 bezeichnen wir mit Q_0^m . Die Strecke zwischen $T^{m-1}(P_x)$ und Q_0^m bezeichnen wir mit X_0^m . Natürlich ist $X_0^m \subset X^m$.

Wir definieren rekursiv

$$Q_i^m := T(Q_{i-1}^{m-1}) \quad \text{für } i > 0 \text{ und } m > i, \quad \text{ sowie}$$

$$X_1^m := \overline{Q_0^m Q_1^m} \subset X^m \quad \text{für } m > 1,$$

$$X_1^1 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X^1 \mid x \geq x(Q_0^1) \} \quad \text{ und schließlich}$$

$$X_i^m := T(X_{i-1}^{m-1}) \quad \text{für } i > 1 \text{ und } m \geq i.$$

Beweis von Lemma 2-7:

R_1 schneidet W_{n_μ} mit Index ± 1 . n_μ ist dabei die in Satz 2-3 c) definierte Zahl - für $\mu \neq \bar{\mu}_1$ ist der Schnitt sogar transversal). Unser Lemma 1-9 liefert uns also, daß sich für hinreichend große n auch X^n und R_1 mit Index ± 1 schneiden. Ist $R_1 \cap V_k - \{P_{k-1}\} \neq \emptyset$, so schneidet R_1 genau die Strecke X_k^n , sofern n groß genug ist. Der Schnitt ist damit genau bestimmt. Für R_0 ist alles analog. §

B e m e r k u n g

Wir können auch ohne das Lemma 1-9. argumentieren und dabei das kleinste n_0 bestimmen. Dazu geht man wie im Beweis von Lemma 2-4 vor, betrachtet also die Parametrisierungen r_i von R_i und deren Richtung im Fixpunkt E , nämlich $r_i' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ist i_0 die kleinste natürliche Zahl, für die $b < 0$ gilt, so schneidet R_{i_0} die x -Achse. Wir können dann für $n_0 = \frac{i_0}{2}$ nachrechnen, daß unsere Behauptung erfüllt ist. Die recht umständlichen Details übergehen wir.

Die Schnittpunkte von X^m und R_0 bzw. R_1 bezeichnen wir wie in Abschnitt 2.4 mit L_0^m und L_1^m . Im Raum $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ bilden (L_0^m, μ) und (L_1^m, μ) zu einer Geraden homöomorphe Kontinua, die wir mit L_0^m und L_1^m bezeichnen wollen. Sei $S^m \subset \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ die Menge der Tupel (P, μ) , für die $P \in X^m \cap S(X^m)$ gilt und $R^m \subset \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ die Menge der Tupel (P, μ) , für die $P \in X^m \cap R(X^m)$ gilt.

Wir stellen uns nun die Frage, ob und wie aus den Mengen L_0^m und L_1^m der "symmetrischen Lösungen" Äste "asymmetrischer Lösungen" in $S^m - L_0^m$ bzw. $R^m - L_1^m$ verzweigen. Der folgende Satz gibt hierzu eine detaillierte Antwort.

Satz 2-8 (Geisterverzweigung im PL-Modell)

I) Zu jedem $n \geq 2$ gibt es ein $e(n) > 0$ und $\delta_n > 0$, so daß

$$2\delta_n < \bar{\mu}_{2n} - \bar{\mu}_{2n+1} \quad \text{und} \quad 2\delta_n < \bar{\mu}_{2n+1} - \bar{\mu}_{2n}$$

ist, sowie ein $m_n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq m_n$ und $0 < e_1 < e(n)$ gilt:

S^m enthält eine Komponente (asymmetrischer Lösungen) $C_s \notin L_0^m$, die L_0^m für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n+1} + \delta_n)$ und für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n} - \delta_n, \bar{\mu}_{2n})$ schneidet. Alle Komponenten $C \subset R^m \cap \mathbb{R}^2 \times (\bar{\mu}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n})$, die L_1^m schneiden, sind ganz in L_1^m enthalten.

R^m enthält eine Komponente (asymmetrischer Lösungen) $C_r \notin L_1^m$, die L_1^m für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n} + \delta_n)$ und für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n-1} - \delta_n, \bar{\mu}_{2n-1})$ schneidet. Alle Komponenten $C \subset S^m \cap \mathbb{R}^2 \times (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-1})$, die L_0^m schneiden, sind ganz in L_0^m enthalten.

II) Es gibt ein $\delta > 0$, sodaß für alle $m > 1$ gilt:

S^m enthält eine Komponente $C_\infty \notin L_0^m$ mit

1. C_∞ schneidet L_0^m für $\mu \in (\bar{\mu}_3, \bar{\mu}_3 + \delta)$,

2. C_∞ schneidet für jedes $\mu_\infty > \bar{\mu}_3 + \delta$ die Menge $\mathbb{R}^2 \times \{\mu_\infty\}$; es ist aber

$$C_\infty \cap L_0^m \cap \{\mu_\infty\} = \emptyset.$$

Alle Komponenten $C \subset R^m \cap \mathbb{R}^2 \times (\bar{\mu}_3, \mu_\infty]$, die L_1^m schneiden, sind ganz in L_1^m enthalten.

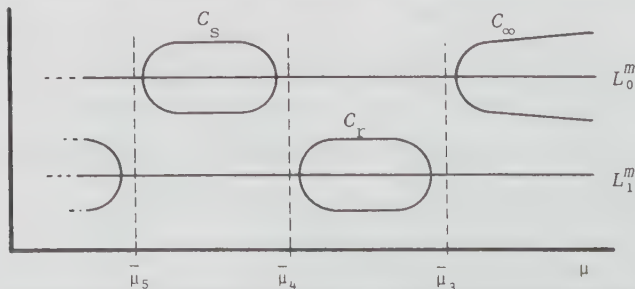


Bild 2-19

Man beachte, daß die Punkte der Komponenten C_S, C_R und C_∞ immer gepaart auftreten. D.h., ist $(P, \mu) \in C_S \subset S^m$, so ist auch $(S(P), \mu) \in S^m$ (das Gleiche gilt für C_∞) und ist $(P, \mu) \in C_R \subset R^m$, so ist auch $(R(P), \mu) \in R^m$.

Für die Randwertaufgabe (0.2) ergibt sich folgende Interpretation:
Ist die Dimension $2m$ (also gerade) und $h = \frac{a}{2m+1}$, so existiert für $h^2 \cdot \lambda \in (\bar{\mu}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n})$ eine von den symmetrischen Lösungen verzweigende Schleife asymmetrischer Geisterlösungen und für

$h^2 \cdot \lambda > \bar{\mu}_3$ verzweigt eine "Gabel" asymmetrischer Geister.

Ist die Dimension $2m+1$ (also ungerade), so haben wir lediglich für $h^2 \cdot \lambda \in (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n-1})$ eine von den symmetrischen Lösungen verzweigende Schleife asymmetrischer Geisterlösungen.

Beweis von Satz 2-8:

Als erstes stellen wir fest, daß für alle $\mu \in (0, \infty)$ gilt, ist $(P, \mu) \in R^m$, so ist $P \notin R_0$. Aus $(P, \mu) \in R^m$ folgt nämlich $T^{m+1}(P) \in Y$. ($Y := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = 0 \right\}$) Wäre aber $P \in R_0$, so hätten wir auch $T^m(P) \in Y$. Dann aber müßte $P = 0$ sein.

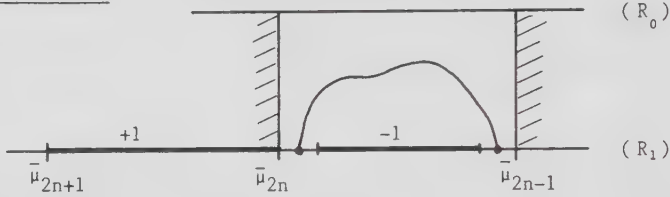
Die Kontinua werden also durch R_0 begrenzt. Entsprechend zeigt man, daß C_S und C_∞ durch R_1 begrenzt werden. Da aus $(P, \mu) \in C_S \subset S^m$ aber auch $(S(P), \mu) \in S^m$ folgt (sowie entsprechendes für C_∞ und C_R), können wir unsere Betrachtung der Schnitte von X^m und $R(X^m)$ (bzw. X^m und $S(X^m)$) auf den von R_0 und R_1 eingeschlossenen (wie in Abschnitt 1.3 die Menge C) Sektor $\sum_\mu$ beschränken. Wir zeigen nun:

a) Für $\mu \in [\bar{\mu}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n}]$ ist der Index der Punkte L_1^m durch

$$I(x^m, R x^m, L_1^m) = +1$$

gegeben. Der Schnitt ist transversal. Es verzweigen in diesem Bereich also keine Lösungen aus L_1^m .

Bild 2-20



b) Für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n} + \delta_n, \bar{\mu}_{2n-1} - \delta_n)$ ist der Index

$$I(x^m, R x^m, L_1^m) = -1.$$

Nach Lemma 1-8 verzweigt aus L_1^m also eine Komponente (asymmetrischer Lösungen) C_r in R^m .

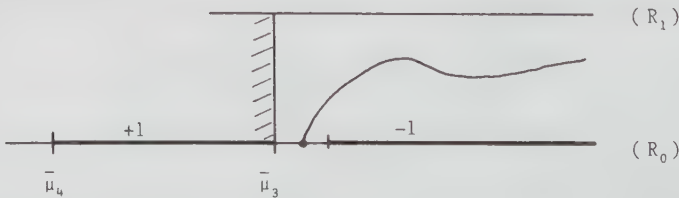
c) Für $\mu = \bar{\mu}_{2n}$ und $\mu = \bar{\mu}_{2n-1}$ folgt aus $(P, \mu) \in R^m$, daß $P \in R_1$ ist.

Da C_r auch durch R_0 begrenzt ist, muß C_r die Menge L_1^m für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n-1} - \delta_n, \bar{\mu}_{2n-1})$ schneiden. a) bis c) zeigen also die Verzweigung aus L_1^m . Die Verzweigung der Komponenten C_s aus L_0^m zeigt man analog. Den Beweis von II) führen wir in folgenden Schritten:

d) Für $\mu \in [\bar{\mu}_4, \bar{\mu}_3]$ ist der Index von L_0^m

$$I(x^m, S x^m, L_0^m) = +1.$$

Bild 2-21



e) Für $\mu > \bar{\mu}_3 + \delta$ ist der Index

$$I(x^m, Sx^m, L_0^m) = -1$$

und der Schnitt ist transversal.

Es verzweigt also für $\mu \in (\bar{\mu}_3, \bar{\mu}_3 + \delta)$ aus L_0^m eine Komponente C_∞ .

Wegen e) kann diese Komponente nicht nach L_0^m zurückkehren.

Wie unter c) folgt aus $(P, \bar{\mu}_3) \in S^m$, daß $P \in R_0$ ist. Ferner begrenzt

R_1 die Komponente C_∞ . Die Komponente muß daher mit μ "nach Unendlich gehen" (d.h. für alle $\mu > \bar{\mu}_3 + \delta$ gibt es $(P, \mu) \in C_\infty$).

Zu a) Ist $\mu \in (\bar{\mu}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n})$, so gilt $I(w_n, R_{w_n}, Q_1) = +1$.

(Es ist $Q_1 \in W_n \cap R_1$ nicht mit Q_j^i zu verwechseln!) Betrachten wir den

Winkel $\psi^n := \phi^0(P_n - P_{n-1})$, so bedeutet dieses $\psi^n < \frac{\pi}{2}$. Für $\mu = \bar{\mu}_{2n}$

ist $\psi^n = \frac{\pi}{2}$. Da $\phi^0(Q_1^0 - P_x) = 0 < \phi^0(P_0 - H)$ bzw.

$\phi^0(Q_1^k - Q_0^k) < \phi^0(P_1 - P_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist offenbar

$$\phi^0(Q_n^m - Q_{n-1}^m) < \psi^n.$$

Wir müssen also nur zeigen, daß sich X_n^m und $R(X_n^m)$ für

$\mu \in [\bar{\mu}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n}]$ zwar schneiden, aber nicht in Q_n^m oder Q_{n-1}^m . Damit

erhalten wir, daß dieser Schnitt transversal ist und der Index

$I(x^m, R x^m, L_1^m) = +1$. Nun schneidet aber R_1 (sofern $\mu \neq \bar{\mu}_{2n+1}$ ist)

die instabile Mannigfaltigkeit im Innern von V_n , d.h. nicht in P_n

oder P_{n-1} . Ist m groß genug, so überträgt sich dieses auf X_n^m .

Kritisch ist die Situation also nur für $\mu = \bar{\mu}_{2n+1}$. In diesem Fall ist

aber $P_n \in R_1$. G_n liegt dann offenbar "oberhalb" von R_1 . Man kann

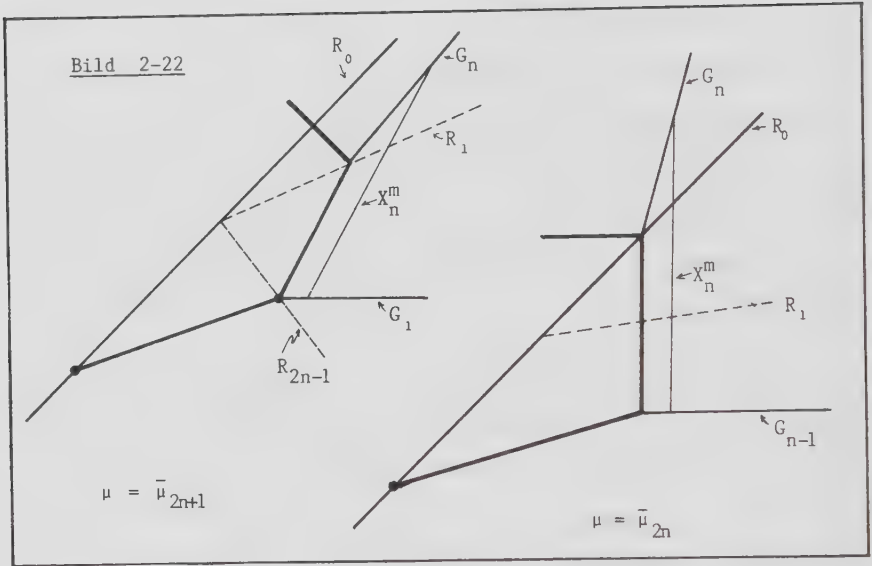
dieses wie im Beweis von Satz 2-4 durch die Betrachtung von Winkeln prä-

zisieren. Dabei geht man davon aus, daß $P_1 \in G_1 \cap R_{2n-1}$ ist und G_1

"über" R_{2n-1} liegt. Wir lassen diese Details fort (man vergleiche

aber Abbildung 2-22). R_1 und X_n^m schneiden sich also für alle hinreichend

großen m auch für $\mu = \bar{\mu}_{2n+1}$.



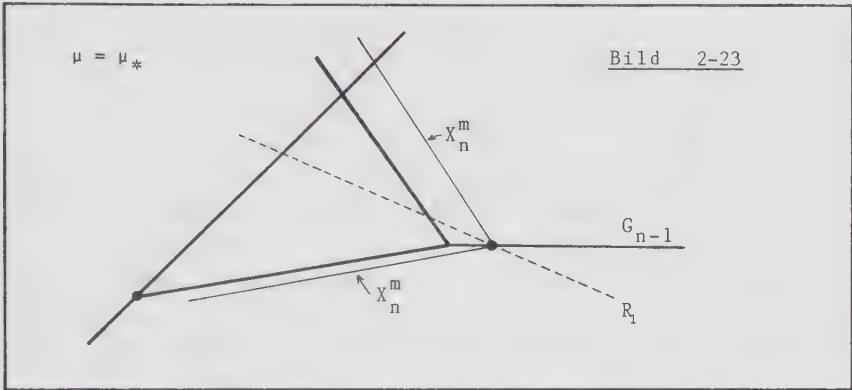
Zu b) Für $\mu \in (\bar{\mu}_{2n} + \delta_n, \bar{\mu}_{2n-1} - \delta_n)$ ist $I(w_n, R w_n, Q_1) = -1$.

Die Zahl δ_n können wir beliebig wählen. Wir wollen nur, daß $\delta_n > 0$ und $\bar{\mu}_{2n} + \delta_n < \bar{\mu}_{2n-1} - \delta_n$ erfüllt sind. Ist m hinreichend groß, dann gilt auch $I(x^m, R x^m, L_1^m) = -1$. Für die Winkel bedeutet dieses:

$\Phi^0(Q_n^m - Q_{n-1}^m) > \frac{\pi}{2}$. In unserem μ -Intervall schneiden sich R_1 und V_n

im Innern von V_n , also insbesondere nicht im Punkt P_{n-1} . Für hinreichend großes m gilt dieses dann auch für R_1 und X_n^m . Der Schnitt in L_1^m ist also transversal.

Man beachte, für festes m können wir mit μ dem Parameter $\bar{\mu}_{2n-1}$ nicht beliebig nahe kommen, ohne einen erneuten Indexwechsel für L_1^m zu durchlaufen. Ist $\mu = \bar{\mu}_{2n-1}$, so liegt G_{n-1} "über" R_1 . Es muß also ein $\mu^* < \bar{\mu}_{2n-1}$ geben, sodaß $L_1^m = Q_{n-1}^m \in R_1$ ist. Dann aber ist der Schnitt nicht transversal.



Zu c) Wir betrachten $\mu = \bar{\mu}_{2n}$ (für $\mu = \bar{\mu}_{2n-1}$ geht man ähnlich vor). Aus $\phi^0(Q_n^m - Q_{n-1}^m) < \frac{\pi}{2}$ folgt offenbar, daß für alle $P \in X_n^m$, die in dem von R_0 und R_1 eingeschlossenen Sektor Σ_μ liegen, $x(P) > x(Q_{n-1}^m)$ gilt. Also schneiden sich X_n^m und $R(X_n^m)$ eindeutig. Für $P \in X_k^m$, $k < n$, gilt aber $x(P) \leq x(Q_{n-1}^m)$. Da die Involution R die x -Koordinate unverändert läßt, kann es also keinen weiteren Schnitt zwischen X_n^m und $R(X_n^m)$ geben.

Zu d) Es ist alles wie in a). Man beachte nur, daß wir $m > 1$ vorausgesetzt haben. Für $m = 2$ haben wir noch keinen Schnittpunkt zwischen G_2 und X^m . Dieses ist aber auch nicht notwendig, da X^m dennoch R_0 schneidet. $I(x^m, Sx^m, L_0^m) = +1$ bedeutet für die Winkel ϕ von X^m : $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4}$.

Zu e) Für $\mu > \bar{\mu}_3$ ist $I(w_n, Sw_n, Q_0) = -1$. Wir können dieses wieder mit dem Lemma 1-9 auf X^m übertragen. Da wir unsere Aussage aber nicht nur für beliebig große m treffen wollen, gehen wir direkt vor und betrachten die Winkel $\phi^0(Q_2^m - Q_1^m)$. Für $m = 2$ nehmen wir anstelle von Q_2^2 einen geeigneten anderen Punkt (z.b. L_0^m) auf X^m . Es gilt

$$\pi > \phi^0(P_2 - P_1) > \phi^0(Q_2^m - Q_1^m) > \phi^0(L_0^2 - Q_1^2).$$

Wir müssen also μ nur so groß wählen, daß $\Phi^0(L_0^2 - Q_1^2) > \frac{3\pi}{4}$ ist.

Dazu betrachten wir das Bild des Tangentialvektors

$$\frac{d x^1}{d x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für einen Punkt in X_1^1 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 2-\mu f' & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\mu f' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es muß also $\mu \geq \frac{3}{f'(s_2)}$ gelten. Damit aber ist δ bestimmt.

Der Schnitt von X_2^m und $S(X_2^m)$ ist transversal, da für alle $\mu > 0$ $Q_1^m \notin R_0$ gilt.

\$\$\$

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [A] E. Allgower, *On a discretisation of $y'' + y^k = 0$* , Proc. Conf. Roy. Irish Acad., New York - London, 1975
- [AH] A. Ambrosetti and P. Hess, *Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems*, J. Math. Anal. Appl. 73, 411-422 (1980)
- [AW] H. Amann and S. Weiss, *On the uniqueness of the topological degree*, Math. Z. 130, 39-54 (1973)
- [Bi] G.D. Birkhoff, *A new criterion of stability*, Atti Congr. Intern. d. Matem. Bologna 5, 5-13 (1928)
- [Bo] E. Bohl, *On the bifurcation diagram of discrete analogues for ordinary bifurcation problems*, Math. Meth. Appl. Sci. 1, 566-571 (1979)
- [BB] K.J. Brown and H. Budin, *On the existence of positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems*, SIAM J. Math. Anal. 10, 875-883 (1979)
- [D] K. Deimling, *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*, Springer, Berlin - Heidelberg (1974)
- [E] B.C. Eaves, *A short course in solving equations with PL homotopies*, SIAM-AMS Proc. Vol. 9, 73-142 (1976)
- [GNN] B. Gidas, W. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Commun. Math. Phys. 68, 109-243 (1979)
- [GKVF] J.M. Greene, R.S. Mac Kay, F. Vivaldi and M.J. Feigenbaum, *Universal behavior in families of area-preserving maps*, Physica 3 D, 468-486 (1981)
- [G] J.M. Greene, *A method for determining a stochastic transition*, J. Math. Phys. 20, 1183-1201 (1979)
- [GP] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (1974)
- [I] M. Irwin, *Smooth dynamical systems*, Academic Press, London (1980)
- [JPS] H. Jürgens, H.O. Peitgen and D. Saupe, *Topological perturbations in the numerical study of nonlinear eigenvalue and bifurcation problems*, Proc. Conf. Analysis and Computation of Fixed Points, Academic Press, New York - London, 139-181 (1980)
- [J] H. Jürgens, *GIPSY Reference Manual*, Bremen (1982)

- [JS,1] H. Jürgens und D. Saupe, *Numerische Behandlung von Nichtlinearen Eigenwert- und Verzweigungsproblemen mit Methoden der Simplicialen Topologie*, Diplomarbeit, Bremen (1979)
- [JS,2] H. Jürgens und D. Saupe, *SCOUT - Simplicial continuation utilities, User's manual and installation guide*, in Vorbereitung
- [K] H.B. Keller, *Numerical methods for two-point boundary-value problems*, Blaisdell Publishing Com., Waltham (1968)
- [LMM] L.J. Laslett, E.M. Mc Millan and J. Moser, *Long-term stability for particle orbits*, AEC Research and Development Report, Courant-Institute of Mathematics, New York University (1968)
- [LY] T.Y. Li and J. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82, 985-992 (1975)
- [N] T. Nordhaus, *Homoklinische Strukturen und die Duffinggleichung*, Diplomarbeit, Bremen (1982)
- [NP] R.D. Nussbaum and H.O. Peitgen, *Special and spurious solutions of $\dot{x}(t) = -\alpha F(x(t-1))$* , noch nicht erschienen
- [OP] J.M. Ortega and W.G. Poole, *Numerical methods for differential equations*, Pitman Publishing Inc., Marshfield (1981)
- [PaM] J. Palis and W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer, New York (1982)
- [P,1] H.O. Peitgen, *Topologische Perturbationen beim globalen numerischen Studium nichtlinearer Eigenwert- und Verzweigungsprobleme*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung 84, 107 - 162 (1982)
- [P,2] H.O. Peitgen, *Phase transition in the homoclinic regime of area preserving diffeomorphisms*, International Symposium on Synergetics, H. Haken, Springer Series in Synergetics (1982)
- [PSS] H.O. Peitgen, D. Saupe and K. Schmitt, *Nonlinear elliptic boundary value problems versus their finite difference approximations: numerically irrelevant solutions*, J. reine u. angew. Mathematik 322, 74-117 (1981)
- [PS] H.O. Peitgen and K. Schmitt, *Positive and spurious solutions of nonlinear eigenvalue problems*, Proceedings Numerical Solution of Nonlinear Equations, 176-324, Bremen (1980)

- [U] S. Ushiki, *Central difference scheme and chaos*, Preprint, Kyoto University (1981)
- [Y] R. de Voglaere, *On the structure of symmetric periodic solutions of conservative systems, with applications*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 4, S. Lefschetz, ed., Princeton Univ. Press (1968)
- [YU] M. Yamaguti and S. Ushiki, *Chaos in numerical analysis of ordinary differential equations*, Physica 3 D, 618-626 (1981)

Anhang A

Weitere Beispiele

A.1 Ein B-Spline - Ansatz für $u'' = -\lambda f(u)$

Im Hauptteil dieser Arbeit haben wir zur Approximation der Randwertaufgabe (0.1) einen Differenzenquotientenansatz gewählt und hierzu Geisterlösungen diskutiert. In gewissem Sinn ist die Methode der Approximation durch Differenzenquotienten sehr "rauh". Wir können das Ergebnis als eine Annäherung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion durch eine stückweise lineare Funktion interpretieren. Man fragt sich daher, ob eine "glatte" Approximation (das soll heißen: ein Verfahren in Räumen, deren Basis aus glatten Funktionen bestehen) prinzipiell andere, nämlich geisterfreie Lösungen liefert.

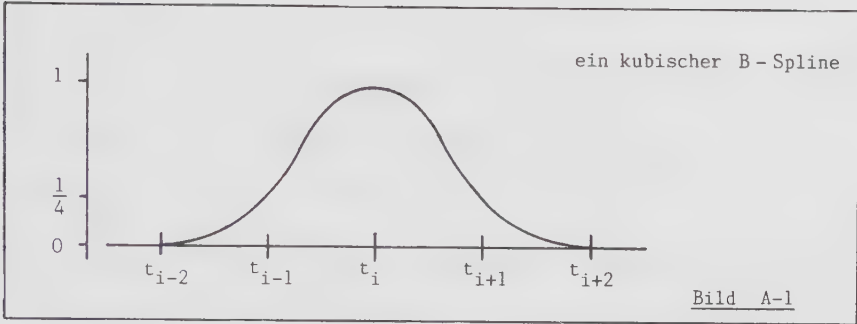
Wir sehen uns dazu als Beispiel einen B-Spline - Ansatz mit Kollokation an. Seien $t_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$ äquidistante Punkte mit $h = t_i - t_{i-1}$. Wir setzen $a_1 = .25$ und $a_2 = 3.75$ sowie $d_i(t) = \frac{t - t_i}{h}$. Ein kubischer B-Spline ist dann gegeben durch:

$$B_i(t) := \begin{cases} a_1 d_{i-2}^3 & | \quad t_{i-2} \leq t < t_{i-1} \\ a_1 (1 + 3(d_{i-1} + d_{i-1}^2 - d_{i-1}^3)) & | \quad t_{i-1} \leq t < t_i \\ a_1 (1 + 3(-d_{i+1} + d_{i+1}^2 + d_{i+1}^3)) & | \quad t_i \leq t < t_{i+1} \\ -a_1 d_{i+2}^3 & | \quad t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0 & | \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (A.1)$$

Abbildung A-1 zeigt den Graphen des B-Splines B_i . Es gilt

$$B_i(t_i) = 1 \quad \text{und} \quad B_i(t_{i\pm 1}) = a_1.$$

Wir nehmen an, daß $t_0 = 0$ und $t_{n+1} = a$ gilt und definieren die Basisfunktionen



$$\begin{aligned}
 \Theta_i(t) &:= B_i(t) \quad , \quad i = 2, n \quad , \\
 \Theta_1(t) &:= 4 B_1(t) - B_0(t) \quad , \\
 \Theta_n(t) &:= 4 B_n(t) - B_{n+1}(t) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Theta_1(0) &= 0 \quad , \quad \Theta_1(t_1) = a_2 \quad , \quad \Theta_1(t_2) = 1 \quad , \\
 \Theta_n(a) &= 0 \quad , \quad \Theta_n(t_n) = a_2 \quad , \quad \Theta_n(t_{n-1}) = 1 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

Die Lösungen von (1.1) versuchen wir durch

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^n u_i \Theta_i(t)$$

zu approximieren. Aus (A.3) folgt, daß die Randbedingungen erfüllt sind.

Die Differentialgleichung wollen wir in den Kollokationspunkten t_i , $i = 1, n$ erfüllen:

$$\tilde{u}''(t_i) = -\lambda f(\tilde{u}(t_i)) \quad .$$

Dieses führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix}
 -9 & +1 & 0 & & & & \\
 +4 & -2 & +1 & & & & \\
 0 & +1 & -2 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & -2 & +1 & 0 \\
 & & 0 & & +1 & -2 & +4 \\
 & & & & & 0 & +1 & -9
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = -\mu \cdot \begin{pmatrix} f(\tilde{u}_1) \\ f(\tilde{u}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(\tilde{u}_n) \end{pmatrix}
 \tag{A.4}$$

mit $\mu = \frac{2}{3} \lambda h^2$ und

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= a_2 u_1 + a_1 u_2, & \tilde{u}_n &= a_2 u_n + a_1 u_{n-1} \\ \tilde{u}_2 &= u_1 + u_2 + a_1 u_3, & \tilde{u}_{n-1} &= u_n + u_{n-1} + a_1 u_{n-2} \\ \tilde{u}_i &= a_1 u_{i-1} + u_i + a_1 u_{i+1} \quad (i = 3, n-2) .\end{aligned}$$

Numerische Experimente zum Gleichungssystem (A.4) liefern qualitativ den gleichen Befund wie wir ihn für (0.2) in der Einleitung beschrieben haben. Insbesondere verzweigen wiederum asymmetrische Geisterlösungen aus symmetrischen Lösungen. In der Tat können wir (A.4) theoretisch fast genauso wie (0.2) behandeln. Aus (A.4) folgt für $i = 3, \dots, n-2$

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} + \mu f\left(\frac{u_{i-1}}{4} + u_i + \frac{u_{i+1}}{4}\right) = 0 .$$

Wieder sind genau drei Elemente miteinander verknüpft. Wir schreiben zunächst implizit

$$F(x, y, z) = y - 2x + z + \mu f\left(\frac{y}{4} + x + \frac{z}{4}\right) = 0$$

und möchten, wie wir es in der Einleitung für Beispiel A getan haben, nach z auflösen. Zu gegebenen x_0, y_0 suchen wir also ein z . Wir nehmen an, daß f differenzierbar ist und erhalten

$$\frac{d F(x_0, y_0, z)}{dz} = 1 + \frac{\mu}{4} f'\left(\frac{y_0}{4} + x_0 + \frac{z}{4}\right) .$$

Ist nun $b = \inf_{x \in \mathbb{R}} f'(x)$, so ist F in z monoton wachsend, sofern

$$\mu > 0 \quad \text{falls } b \geq 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{-4}{b} > \mu > 0 \quad \text{falls } b < 0$$

gilt. Dann aber können wir eindeutig nach z auflösen. Wir schreiben

$$z = G_\mu(x, y) .$$

Wir können also wiederum die Abbildung (1.1) $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x, y) \\ x \end{pmatrix}$ studieren.

Die Randbedingungen können wir in diesem Fall natürlich nicht einfach

durch die Koordinatenachsen darstellen. Durch die u_1, u_2 und u_3 bzw. u_n, u_{n-1} und u_{n-2} verknüpfenden Gleichungen von (A.4) gelangen wir zu geeigneten Mengen. Die erste Gleichung liefert

$$F^1(x, z) = z - 9x + \mu f(3.75x + .25z) = 0 ,$$

die zweite Gleichung

$$F^2(x, y, z) = 4y - 2x + z + \mu f(y + x + .25z) = 0 .$$

Wir definieren

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid F^1(y, x) = 0 \right\} \quad \text{und} \\ B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid F^2(y, v, x) = 0, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \in B_1 \right\} .$$

Für $\mu \rightarrow 0$ gilt

$$B_1 \approx \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = \frac{x}{9} \right\} \quad \text{und} \\ B_2 \approx \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = \frac{9}{14} x \right\} .$$

Insbesondere kann man B_2 als Graphen einer Funktion in x darstellen.

Setzen wir nun $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} := T^{k-3} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad k = 4, n-1$$

für beliebige $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so folgt aus

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in B_2 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in S(B_2) ,$$

daß $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ eine Lösung von (A.4) ist. x_1, x_2 und x_n haben wir dabei den Randbedingungen entsprechend zu wählen.

A.2 Die Gleichung $\Delta u = -\lambda f(u)$

Wir haben uns bislang nur mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigt. Das Phänomen der Geisterlösungen ist jedoch nicht auf diese beschränkt. Wir können unsere verschiedenen Geisterlösungen auch bei partiellen Differentialgleichungen beobachten. Wir betrachten als Beispiel das zu (1.1) analoge Problem:

A u f g a b e (A.5)

Sei $\Omega := [0, a]^m$. Man finde eine auf Ω nirgends negative Abbildung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\Delta u + \lambda f(u) = 0$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Δ bezeichne den Laplace-Operator, also $\Delta u = \sum_{i=1}^m u_{x_i x_i}$. Wir untersuchen das Problem für $m = 2$.

Sei dazu Ω äquidistant durch die Punkte $(t_i, t_j) \in \mathbb{R}^2$, $i, j = 1, n$, unterteilt. Wir definieren t_i dabei wie in Abschnitt 0.1, insbesondere ist also $h = t_i - t_{i-1}$ (h ist die Maschenweite des durch (t_i, t_j) definierten Gitters). Wir approximieren die Lösungen von (A.5) diskret auf diesem Gitter durch $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. in den Punkten (t_i, t_j) durch u_{ij} (zu diesem Ansatz vergleiche man wiederum $|K|$ oder $|OP|$).

Um die Randbedingungen zu erfüllen setzen wir

$$u_{0j} = u_{n+1j} = 0 \quad \text{für } j = 1, n,$$

$$u_{i0} = u_{in+1} = 0 \quad \text{für } i = 1, n.$$

Δu approximieren wir durch einen Differenzenstern und gelangen so zu dem Gleichungssystem (A.6).

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2} + \lambda f(u_{i,j}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

für $i, j = 1, n$,

das wir als n^2 -dimensionale Approximation von (A.5) benutzen.

B. Gidas, W. Ni und L. Nirenberg zeigen in [GNN], daß die Lösungen von (A.5) symmetrisch sein müssen, und zwar in jeder Richtung. Das heißt, ist $u(x,y)$ eine Lösung von (A.5), so gilt

$$u(x,y) = u(a-x,y) \quad \text{für } x,y \in [0,a] \quad \text{und}$$

$$u(x,y) = u(x,a-y) \quad \text{für } x,y \in [0,a].$$

Um den Rechenaufwand in den numerischen Experimenten zu reduzieren, haben wir eine dieser beiden Symmetrien im Ansatz gleich berücksichtigt. Für $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) gerade haben wir daher

$$u_{i,m+1} := u_{i,m} \quad (i = 1, n)$$

gesetzt und die Gleichung (A.6) nur mit $i = 1, n$ und $j = 1, m$ gerechnet.

Für $n = 2m-1$ ungerade haben wir entsprechend mit

$$u_{i,m+1} := u_{i,m-1}$$

gerechnet. Als Nichtlinearität haben wir f_1 (0.3) benutzt. Wie im Beispiel der Einleitung war es möglich die Lösungskontinua der "unteren" und "oberen" Lösungen zu verfolgen. Und wiederum verzweigen aus den "oberen richtigen" Lösungen (wie in Bild 0-4, 0-5) asymmetrische Geisterlösungen (d.h. es ist $u_{i,j} \neq u_{n+1-i,j}$).

Wir wollen uns nun ansehen, wie sich dieses Beispiel in die von uns dargestellte Theorie einfügt. Sei für $j = 0, n+1$

$$\bar{u}_j := {}^t(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}).$$

Insbesondere sei entsprechend den Randbedingungen, die wir (A.6) vorangestellt haben, $\bar{u}_0 = \bar{u}_{n+1} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Setzen wir nun

$$B := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \\ 0 & -1 & 4 & \\ 0 & & & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (A.7)$$

so ist (A.6) äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\bar{u}_{j-1} - B \bar{u}_j + \bar{u}_{j+1} + \lambda h^2 f(\bar{u}_j) = 0, \quad j = 1, n. \quad (A.8)$$

Dabei sei wieder f als Nemitzkii-Operator aufgefaßt, also

$$f(\bar{u}_j) = {}^t(f(\bar{u}_{1j}), \dots, f(\bar{u}_{nj})).$$

Genau wie in der Einleitung können wir nun nach $\bar{u}_{j+1}$ auflösen und erhalten die

A b b i l d u n g (A.9)

$$\left| \begin{array}{l} T_\mu : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Bx - \mu f(x) - y \\ x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Hierbei sind $x, y \in \mathbb{R}^n$!

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 0 \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \text{und} \\ Y &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = 0 \in \mathbb{R}^n \right\}, \end{aligned} \quad (A.10)$$

so sind die Lösungen von (A.8) ganz genau wie in der Einleitung charakterisiert, d.h. ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = T^{k-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in Y \subset \mathbb{R}^{2n},$$

so ist $x_1, \dots, x_n$ eine Lösung von (A.8), etc. .

Das Gleiche gilt für die Charakterisierung symmetrischer Lösungen (d.h. Lemma 1-2 gilt auch für $u_i, x_i \in \mathbb{R}^n$ und die Randwertaufgabe (A.8)). Wollen wir nun die Geisterlösungen des Problems mit den Hilfsmitteln unserer Theorie untersuchen, so haben wir uns mit stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Fixpunkte im $\mathbb{R}^{2n}$ zu beschäftigen. Dieses ist technisch natürlich wesentlich komplizierter als im Fall $n = 1$. Dementsprechend wollen wir hier nur einige Punkte andeuten, um zu zeigen, daß die Situation im Prinzip beherrscht werden kann.

Für die Fixpunkte von T (A.9) gilt $x = y$ und $Bx - 2x - \mu f(x) = 0$. Wir bemerken nun, daß wir die (eindimensionale) Randwertaufgabe (0.2) in Matrixform schreiben können:

$$Ax - \mu f(x) = 0 \quad (\text{A.11})$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots \\ 0 & \vdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Offenbar ist $Bx - 2x = Ax$. Damit aber ist der folgende bemerkenswerte Zusammenhang bewiesen.

Satz A-1 (Fixpunkte von T)

Bezeichne $T: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ den Homöomorphismus (A.9), d.h. die zum Differenzenansatz (A.6) der Randwertaufgabe $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ gehörende Abbildung.

Sei $Ax - \mu f(x) = 0$ das die Lösungen des Differenzenansatzes zu $u'' + \lambda f(u) = 0$ beschreibende Gleichungssystem (A.11).

Der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist genau dann ein Fixpunkt von T , wenn

$$Ax - \mu f(x) = 0$$

und $x = y$ gilt.

Sei nun T im Punkte $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ differenzierbar, d.h. f sei in den Punkten, die sich aus den Koordinaten von x ergeben, differenzierbar. Wir wollen die Linearisierung von T in P untersuchen. Sei dazu $\bar{B}_x := B - \mu f'(x)$ und $\bar{A}_x := A - \mu f'(x)$. Die Eigenwerte von $\bar{A}_x$ bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, n$. Die Eigenwerte von $\bar{B}_x$ sind dann $\tilde{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i + 2$. Sind e_i , $i = 1, n$, zugehörige Eigenvektoren von $\bar{A}_x$, so sind diese natürlich auch Eigenvektoren von $\bar{B}_x$.

L e m m a A-2 (Eigenwerte und Eigenvektoren von $DT|_P$)

Sei $\mu_i := \frac{\tilde{\lambda}_i + \sqrt{\tilde{\lambda}_i^2 - 4}}{2} = \frac{\bar{\lambda}_i + 2 + \sqrt{\bar{\lambda}_i^2 + 4\bar{\lambda}_i}}{2}$ für $i = 1, n$.

Die Jacobi-Matrix

$$DT|_P = \begin{pmatrix} \bar{B}_x & - \text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

hat (für $i = 1, n$) die Eigenwerte μ_i und $\frac{1}{\mu_i}$, sowie zugehörige Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} \mu_i e_i \\ e_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} e_i \\ \mu_i e_i \end{pmatrix}.$$

Beweis:

Es gilt $\mu_i + \frac{1}{\mu_i} = \tilde{\lambda}_i$. Damit können wir nachrechnen

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_x & - \text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_i e_i \\ e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_i \tilde{\lambda}_i e_i - e_i \\ \mu_i e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_i^2 e_i \\ \mu_i e_i \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_x & - \text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_i \\ \mu_i e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_i e_i - \mu_i e_i \\ e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_i} e_i \\ e_i \end{pmatrix}.$$

Offenbar gilt, daß μ_i genau dann reell ist, wenn $|\lambda_i| \geq 2$ ist.

Ist aber $|\lambda_i| < 2$, so folgt aus

$$2 \operatorname{Re}(\mu_i) = \lambda_i,$$

$$2 \operatorname{Im}(\mu_i) = i \sqrt{\lambda_i^2 - 4} \quad (i \text{ bezeichne die imaginäre Einheit}),$$

daß

$$|\mu_i|^2 = \frac{1}{4} (\lambda_i^2 - (\lambda_i^2 - 4)) = 1$$

gilt und damit

$$|\mu_i| = 1 \iff |\lambda_i| \leq 2$$

ist. Damit haben wir gezeigt:

L e m m a A-3 (hyperbolische Fixpunkte von T)

Sei $H = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Fixpunkt von T (A.9) und T in H differenzierbar.

$\overline{\lambda}_i$ und λ_i bezeichnen die Eigenwerte der zugehörigen Matrizen $\overline{A}_x$ und $\overline{B}_x$ (wie oben).

H ist genau dann hyperbolisch, wenn

$$|\lambda_i| = |\overline{\lambda}_i + 2| > 2 \quad \text{für alle } i = 1, n$$

gilt.

\$

Wie in Abschnitt 1.2 wollen wir unser Beispiel konkretisieren, indem wir annehmen, daß unsere Nichtlinearität durch $f \in N(a,b)$ (1.2) gegeben ist. Für den Fixpunkt 0 rechnen wir nun:

$$\overline{A}_0 e_i = (A - \mu f'(0)) e_i = \overline{\lambda}_i e_i$$

$$A e_i = (\overline{\lambda}_i + \mu f'(0)) e_i.$$

Die Eigenvektoren von $\overline{A}_0$ sind also die Eigenvektoren von A und für die Eigenwerte von A (λ_i , $i=1, n$) gilt $\lambda_i = \overline{\lambda}_i + \mu f'(0)$. Die Eigenwerte

und Eigenvektoren von A sind aber wohlbekannt. Es gilt (mit $i = 1, n$)

$$\lambda_i = 2 - 2 \cos \frac{i\pi}{n+1},$$

und mit

$$e_{ik} = \sin \frac{ik\pi}{n+1}$$

ergibt

$$e_i = {}^t(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in})$$

einen zugehörigen Eigenvektor.

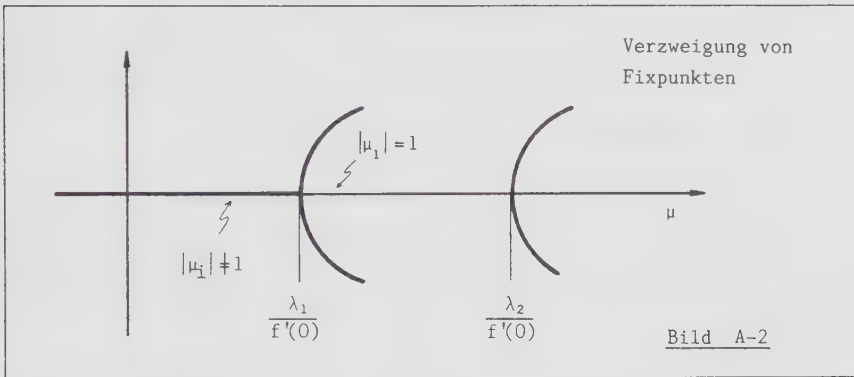
B e m e r k u n g

Offenbar ist $\sin(it)$ eine Lösung von $u'' + i^2 u = 0$. Unsere Vektoren e_i sind also interessanterweise die diskretisierten Eigenfunktionen $\sin(it)$, $i = 1, n$ der Randwertaufgabe (0.1) auf dem Intervall $[0, 1]$.

Ist nun $\mu f'(0) < \lambda_1$, so sind alle $\overline{\lambda_i}$ positiv und damit ist $|\overline{\lambda_1}| > 2$. Der Fixpunkt 0 ist dann also hyperbolisch. Für $\mu f'(0) > \lambda_1$ ist $\overline{\lambda_1}$ negativ. Entsprechendes gilt für λ_i , $i = 2, n$. Die Zahl

$$I = \prod_{i=1}^n \text{sign } \overline{\lambda_i}$$

ändert also für $\mu f'(0) = \lambda_i$, $i = 1, n$ ihr Vorzeichen. Nun ist aber I ein Index (man vergleiche $|D|$, sowie Abschnitt 1.4) der trivialen Lösung von $Ax - \mu f(x) = 0$. Nach dem Satz von Rabinowitz und Krasnoselskii (man vergleiche unsere Formulierung in Abschnitt 1.5) verzweigen dann hieraus in $\mu f'(0) = \lambda_i$ ($i = 1, n$) Kontinua weiterer Lösungen. Für unseren hyperbolischen Fixpunkt 0 verzweigt in $\mu = \frac{\lambda_1}{f'(0)}$ also ein Kontinuum nichttrivialer Fixpunkte. Abbildung A-2 veranschaulicht dieses als Fixpunkt - Verzweigungsdiagramm.



Sofern das Verhalten von f in der Nähe der Null noch etwas genauer bekannt ist, kann man mit Hilfe der Abbildungsgradtheorie analysieren, ob die verzweigenden Fixpunkte hyperbolisch sind. Wir wollen dieses hier nicht tun, sondern eine "asymptotische" Betrachtung anstellen.

Sei $0 < a < b$ und $f \in N(a, b)$. Wir wollen zunächst noch annehmen, daß nicht nur auf $[a, b]$, sondern auf $[a, 2b-a]$ $f(t) = b - t$ gilt. Ist nun $\bar{b} := {}^t(b, b, \dots, b) \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt nahe $\bar{b}$, so gilt $f(x) = \bar{b} - x$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} Ax - \mu(\bar{b} - x) &= 0 \\ \Rightarrow A\bar{b} &= (A + \mu \text{Id})(\bar{b} - x) \\ \Rightarrow \bar{b} - x &= (A + \mu \text{Id})^{-1} A\bar{b}. \end{aligned}$$

Für $\mu > -\lambda_1$ ist $(A + \mu \text{Id})$ in der Tat invertierbar und wir können x berechnen. Da aber

$$(A + \mu \text{Id})^{-1} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{A}{\mu} + \text{Id} \right)^{-1}$$

gilt, geht $\bar{b} - x$ gegen Null, sofern μ groß wird. Wir haben also für große μ in der Nähe von $\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ einen Fixpunkt $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ der Abbildung T_μ . Für die Linearisierung in diesem Fixpunkt gilt

$$\bar{A} = A + \mu \text{Id}.$$

Die Eigenwerte von $\bar{A}$ sind also durch $\bar{\lambda}_i = \lambda_i + \mu$ gegeben. Ist also $\mu > -\lambda_1$, so ist $\bar{\lambda}_i > 0$ also $|\bar{\lambda}_i| > 0$ für $i = 1, n$ und damit unser Fixpunkt hyperbolisch.

Man kann sich überlegen, daß für alle Komponenten x_i des Vektors x die Ungleichung $x_i < b$ gilt. Dann aber braucht nur $f \in N(a, b)$ erfüllt zu sein und unsere Zusatzannahme ist überflüssig. Wir gehen auf diese Details nicht ein.

Anhang B

Beweis des Schnitzzahl Lemmas

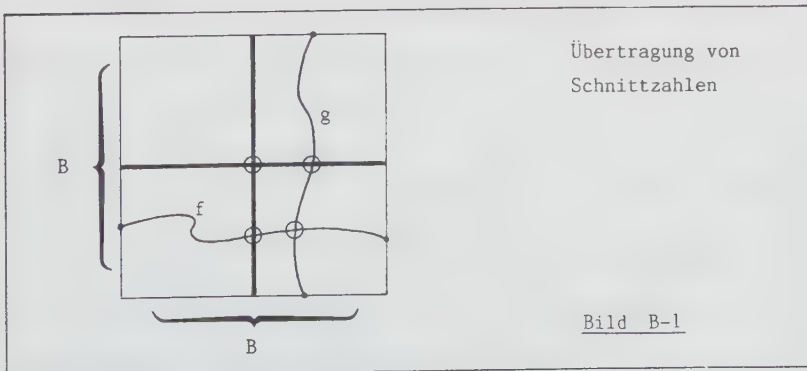
Wir betrachten das Problem zunächst lokal in einer normalisierten Form. Im folgenden sei stets $B_{1(2)} := \{x \in \mathbb{R}^{n(m)} \mid \|x\| < 1\}$ ($\|\cdot\|$ eine beliebige Norm) und $B = B_1 \times B_2$. Ferner seien $A_1 \subset \mathbb{R}^n$, $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f: \overline{A_1} \rightarrow \overline{B}$, $g: \overline{A_2} \rightarrow \overline{B}$ stetig (Wir schreiben $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$). Mit $i_{1(2)}: \overline{B_{1(2)}} \rightarrow \overline{B}$ bezeichnen wir die Inklusionen $i_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $i_2(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Lemma B-1 (lokale Schnitzzahlübertragung)

Sei $f(\partial A_1) \subset \partial B_1 \times B_2$ und $g(\partial A_2) \subset B_1 \times \partial B_2$.

Dann sind $S(f, g)$, $S(i_1, g)$, $S(f, i_2)$ definiert und es gilt

$$S(f, g) = S(i_1, i_2) \cdot S(i_1, g) \cdot S(f, i_2).$$



Beweis:

Nach Voraussetzung besitzt $g(y) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \alpha f_2(x) \end{pmatrix}$ für $\alpha \in [0, 1]$ keine

Lösung auf dem Rand von $A_1 \times A_2$. Aus der Homotopieinvarianz folgt also

$$S(f, g) = S\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, g\right).$$

Ebenso folgt

$$S(i_1, g) = S\left(i_1, \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}\right),$$

$$S(f, i_2) = S\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, i_2\right)$$

und schließlich

$$S(f, g) = S\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}\right).$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix} = (i_1 - i_2) \circ \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} - i_2\right) \circ (i_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}).$$

Die Behauptung folgt also aus der Produkteigenschaft des Abbildungsgrades.

§

Beweis von Lemma 1-9:

Im wesentlichen müssen wir nur noch unser Problem in die Situation von Lemma B-1 transformieren. Die lokale instabile Mannigfaltigkeit W_{loc}^u ist eine einbettbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$. Es gibt daher einen Diffeomorphismus $\psi: \tilde{V} \rightarrow B$, so daß $\psi(W_{loc}^u \cap \tilde{V}) = B_1 \times \{0\}$ ist. Da nach Voraussetzung in ∂V keine Schnittpunkte von $W_{loc}^u \cap N$ bzw. $W_{loc}^u \cap W_{loc}^s$ liegen, können wir $\tilde{V} \subset V$ (offen) so wählen, daß alle diese Schnittpunkte in $\tilde{V}$ liegen.

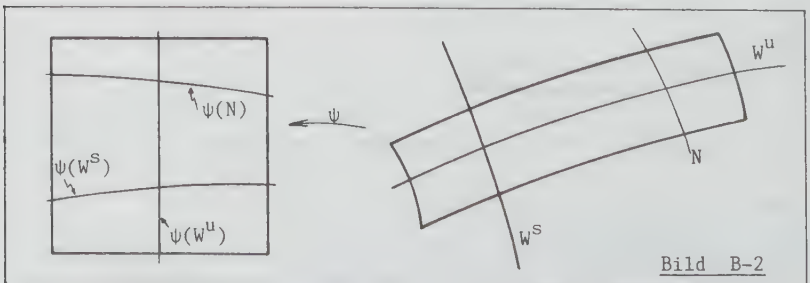


Bild B-2

Sei $D^N := q^{-1}(\tilde{V})$ und $D^S := w_S^{-1}(\tilde{V})$. Offenbar können wir ψ so wählen, daß $\psi \circ q(\partial D^N) \subset B_1 \times \partial B_2$ und ebenso $\psi \circ w_S(\partial D^S) \subset B_1 \times \partial B_2$ gilt.

Wir betrachten nun die Iterierten von M . Sei $A_i^M := p_i^{-1}(\tilde{V})$. Wäre T eine lineare Abbildung, so wären W^S und W^U einfach durch die stabilen und instabilen Unterräume U^S bzw. U^U gegeben. Da für die zu U^S gehörenden Eigenwerte $|\lambda| < 1$ gilt, konvergiert $p_i(A_i^M)$ dann natürlich gegen W^U . Für einen Diffeomorphismus T ändert sich in einer Umgebung U_H von H die Situation nicht. Nach Hartman und Grobman gibt es nämlich einen Homöomorphismus $h : U_0 \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow U_H$, so daß

$$h \circ DT|_H = T \circ h$$

gilt (T ist zu seiner Linearisierung konjugiert). Einzelheiten findet man in [PaM]. $p_i(A_i^M)$ konvergiert also gegen $W_{loc}^U \cap \tilde{V}$, dann aber gilt für hinreichend große i , daß

$$\psi \circ p_i(\partial A_i^M) \subset \partial B_1 \times B_2$$

ist. Damit haben wir die Voraussetzungen von Lemma B-1 erfüllt. Es gilt also

$$S(\psi \circ p_k, \psi \circ q) = S(\psi \circ w_U, \psi \circ w_S)$$

und unsere Behauptung folgt aus Lemma 1-6 e). §

B e m e r k u n g

In [PaM] wird nicht nur die einfache Konvergenz von $p_i(A_i^M)$ gegen $W_{loc}^U \cap \tilde{V}$ bewiesen. Mit dem λ -Lemma von Palis wird gezeigt (sofern p ein C^r -Diffeomorphismus und der Schnitt von M und W^S transversal ist), daß diese Konvergenz im C^r -Sinne gilt. Das λ -Lemma gilt nicht für PL-Abbildungen. Die Übertragung von Schnitzzahlen dagegen ist auch in diesem Fall gültig. Im Beweis muß man ψ dann lediglich als geeigneten PL-Homöomorphismus wählen.

Anhang C

Bezeichnungen

S, R	Involutionen, vgl. S. 21ff
R_i	Fixpunkt Mengen der Involutionen, vgl. S. 21
X, Y	"x-Achse" und "y-Achse", vgl. (0.5), (A.10)
$W^S(H)$	stabile Mannigfaltigkeit des hyperbolischen Fixpunktes H
$W^u(H)$	instabile Mannigfaltigkeit, vgl. S. 26
W_{loc}^u	lokale instabile Mannigfaltigkeit, vgl. S. 28, 35
P_X	Schnittpunkt von $W^S(H)$ und X
X^{iter}	Iterierte der x-Achse
PL-Modell:	
W_i	Iterierte der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit, vgl. S. 66
V_i	Abschnitte aus W_i , vgl. S. 66
P_i	"Ecken" der Mannigfaltigkeit W_k , vgl. S. 66
G_i	Iterierte der Geraden G , vgl. S. 86
$N(a,b)$	Nichtlinearitäten (1.2)
$V_n^{(0)}$	Nichtlinearitäten (2.4)
t_v	Transponierung: Ist v ein Zeilenvektor, so ist t_v ein Spaltenvektor (und umgekehrt).
$f(v)$	Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion aber $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so fassen wir f als Nemitzkii-Operator auf: $f(v) := {}^t(f(v_1), \dots, f(v_n))$.
$x(P)$	Projektion des Punktes $P \in \mathbb{R}^2$ auf die x-Achse: $P = (a,b) \implies x(P) = a$ ($y(P)$ entsprechend)
$\phi^0(P)$	Winkel des Punktes P , vgl. S. 78
$ \cdot $	Betrag, bzw. Norm des $\mathbb{R}^n$ (meist beliebig)
$\ \cdot\ ^1$	C^1 -Norm, vgl. S. 28 ($\ \cdot\ ^0$ Supremumsnorm)
$DT _P$	Linearisierung von T im Punkte P , bzw. Jacobi-Matrix
$TM _P$	Tangentialraum der Mannigfaltigkeit M im Punkte P
Φ	Ende einer Beweisskizze, zitierter Satz ohne Beweis
$\$$	Ende eines Beweises

